



## Vektoranalysis + Vektoralgebra

### Aufgabe 1:

Welchen Wert hat die Divergenz des Vektorfeldes

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x 5 x^2 \sin \frac{\pi x}{2}$$

an der Stelle  $x = 1$  ?      [  $\operatorname{div} \mathbf{A}(x=1) = 10$  ]

### Aufgabe 2:

Berechnen Sie den Ausdruck  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$  für das Vektorfeld

$$\mathbf{A} = 3 x z^2 \mathbf{e}_x - y z \mathbf{e}_y + (x + 2 z) \mathbf{e}_z .$$

[  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -6 x \mathbf{e}_x + (6 z - 1) \mathbf{e}_z$  ]

### Aufgabe 3:

Gegeben ist die skalare Ortsfunktion

$$\Phi(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2} .$$

a) Berechnen Sie den Gradienten von  $\Phi$  in kartesischen Koordinaten.

$$\left[ \operatorname{grad} \Phi = -\frac{2 x z \mathbf{e}_x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2 y z \mathbf{e}_y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\mathbf{e}_z}{x^2 + y^2} \right]$$

b) Formen Sie das Ergebnis in zylindrische Koordinaten um.

$$\left[ \operatorname{grad} \Phi = -\frac{2 z \mathbf{e}_\rho}{\rho^3} + \frac{\mathbf{e}_z}{\rho^2} \right]$$

### Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} .$$



## TEM - Wellen

### Aufgabe 1:

Die komplexe Amplitude der elektrischen Feldstärke einer TEM-Welle wird mit  $0 \leq \delta \leq \pi/2$  durch folgenden Ausdruck beschrieben:

$$\vec{E}(z) = E_0 \left( e^{j\delta} \vec{e}_x + e^{-j\delta} \vec{e}_y \right) e^{-jk_0 z} .$$

a) Wie lautet die reelle Zeitfunktion  $\vec{E}(z, t)$  ?

$$[ \vec{E}(z, t) = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t - k_0 z + \delta) + E_0 \vec{e}_y \cos(\omega t - k_0 z - \delta) ]$$

b) Wie groß muss  $\delta$  gewählt werden, damit folgende Polarisation vorliegt:

- lineare Polarisation, [  $\delta = 0$  oder  $\delta = \pi/2$  ]
- zirkulare Polarisation ? [  $\delta = \pi/4$  ]

c) Es gelte  $E_0 = 1 \text{ V/m}$  und  $\delta = 0$ . Welche Wirkleistung wird im zeitlichen Mittel innerhalb einer Phasenfront von  $1 \text{ m}^2$  transportiert ? [  $P = 2,655 \text{ mW}$  ]

### Aufgabe 2:

Eine TEM-Welle breitet sich in Meerwasser mit den Materialkonstanten  $\epsilon_r = 80$ ,  $\mu_r = 1$  und  $\kappa = 5 \text{ S/m}$  aus.

a) Es sei  $f = 25 \text{ kHz}$ . Nach welcher Distanz  $d_1$  ist die TEM-Welle um 20 dB gedämpft? [  $d_1 = 3,278 \text{ m}$  ]

b) Nun gelte  $f = 25 \text{ MHz}$ . Nach welcher Distanz  $d_2$  ist jetzt die TEM-Welle um 20 dB gedämpft? [  $d_2 = 0,105 \text{ m}$  ]

### Aufgabe 3:

Gegeben ist ein gerader, zylindrischer, massiver Leiter mit kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser  $D = 200 \mu\text{m}$ , Material Kupfer).

a) Wie groß ist der Gleichstromwiderstandsbelag  $R'_0 = R_0/l$  des Leiters ?

$$[ R'_0 = 0,558 \Omega/\text{m} ]$$

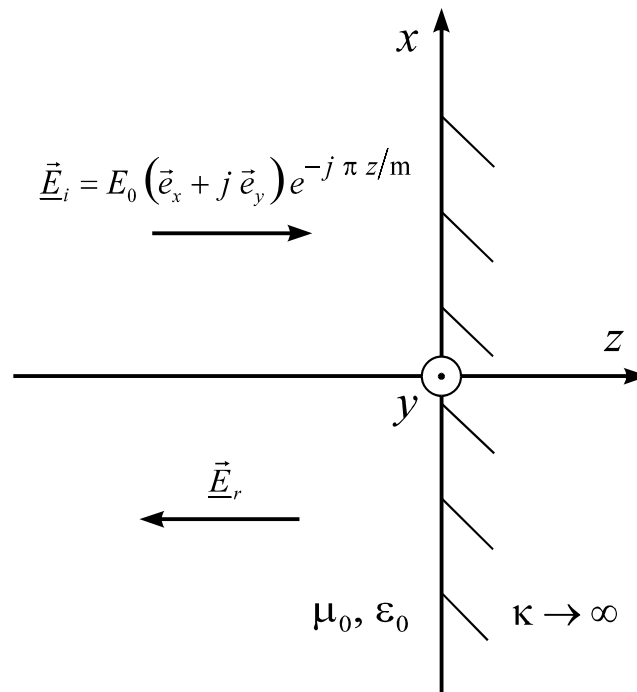
b) Um welchen Faktor steigt der HF-Widerstand bei den Frequenzen  $f = 100 \text{ MHz}$  und  $f = 10 \text{ GHz}$  jeweils gegenüber dem Gleichstromwiderstand an ? [  $R_{HF}/R_0 = 7,5$  bzw.  $R_{HF}/R_0 = 75$  ]



## Grenzflächen

### Aufgabe 1:

Eine homogene TEM-Welle mit einer zeitgemittelten Leistungsdichte von  $S_i = 1 \text{ W/m}^2$  trifft, vom freien Raum ( $\mu_0, \epsilon_0$ ) kommend, bei  $z = 0$  senkrecht auf eine elektrisch ideal leitende Wand ( $\kappa \rightarrow \infty$ ).



Das gesamte elektrische Feld vor der Wand erhält man aus:

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r .$$

- Welche Frequenz  $f$  hat die einfallende Welle? [ $f = 150 \text{ MHz}$ ]
- Bestimmen Sie den Zahlenwert von  $E_0$ . [ $E_0 = 19,41 \text{ V/m}$ ]
- Berechnen Sie die reflektierte Welle  $\vec{E}_r$ . [ $\vec{E}_r = -E_0(\vec{e}_x + j \vec{e}_y)e^{j \pi z/m}$ ]
- Welche Polarisation hat die einfallende und welche die reflektierte Welle?  
[einfallende: LHC und reflektierte: RHC]
- Bestimmen Sie am Ort  $z = -\lambda_0/2$  das zeitabhängige Magnetfeld  $\vec{H}(t)$ , das sich aus einfallender und reflektierter Welle zusammensetzt.

$$[\vec{H}(t) = \frac{-2 E_0}{Z_0} (\vec{e}_y \cos \omega t + \vec{e}_x \sin \omega t)]$$

**Aufgabe 2:**

Eine TEM-Welle mit der Frequenz  $f = 30 \text{ MHz}$  und der Amplitude  $E_0 = 1 \text{ V/m}$  treffe senkrecht von oben auf die ebene Meeresoberfläche auf. In welcher Wassertiefe  $L$  ist die Amplitude der Welle auf  $10^{-3} \text{ V/m}$  abgesunken, wenn Meerwasser die Materialkonstanten  $\epsilon_r = 80$ ,  $\mu_r = 1$  und  $\kappa = 2,5 \text{ S/m}$  besitzt? Berechnen Sie zunächst den Durchlassfaktor und danach die Dämpfung im Meerwasser.

**Hilfe:**

$$\left| \frac{2}{1 + \sqrt{a - jb}} \right| = \frac{2}{\sqrt{(1 + \sqrt{c} \cos \varphi)^2 + c \sin^2 \varphi}} \quad \text{mit} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{-b}{a}.$$

$$[ |d| = 0,0507, \alpha = 16,75 \text{ m}^{-1}, L = 23,4 \text{ cm} ]$$

**Aufgabe 3:**

Eine ebene Welle soll in Luft senkrecht auf eine ebene Kupferplatte der elektrischen Leitfähigkeit  $\kappa = 57 \cdot 10^6 \text{ S/m}$  auftreffen. Die Dicke der Platte sei sehr viel größer als die Eindringtiefe  $\delta$ , und es gelte  $\kappa \gg \omega \epsilon_0$ . Für denjenigen Anteil der hinlaufenden Energie, der reflektiert wird, gilt in sehr guter Näherung:

$$|\underline{r}|^2 = \frac{\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0} - \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega \epsilon_0} + 1}}{\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0} + \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega \epsilon_0} + 1}}.$$

- a) Formen Sie diesen Ausdruck für  $\kappa/(\omega \epsilon_0) \gg 1$  weiter um und zeigen Sie, dass näherungsweise gilt:

$$\boxed{|\underline{r}|^2 \approx 1 - 2 \frac{\omega}{c_0} \delta} \quad \text{mit der Eindringtiefe} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \kappa}}.$$

**Hilfe:** Machen Sie sinnvolle Vernachlässigungen und benutzen Sie  $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$

- b) Welchen Wert hat  $|\underline{r}|^2$  bei der Frequenz  $f = 128,2 \text{ GHz}$ ?
- c) Wie groß ist dann der transmittierte Energieanteil?

**Antworten:**  $|\underline{r}|^2 = 99,9 \%$  und  $1 - |\underline{r}|^2 = 0,1 \%$

**Aufgabe 4:**

Eine TEM-Welle breitet sich mit der Amplitude  $E_0 = 1 \text{ V/m}$  in destilliertem Wasser mit den Materialkonstanten  $\epsilon_r = 81$ ,  $\mu_r = 1$  und  $\kappa = 0$  aus. Sie fällt s-polarisiert schräg auf eine ebene Trennfläche Wasser-Luft ein.

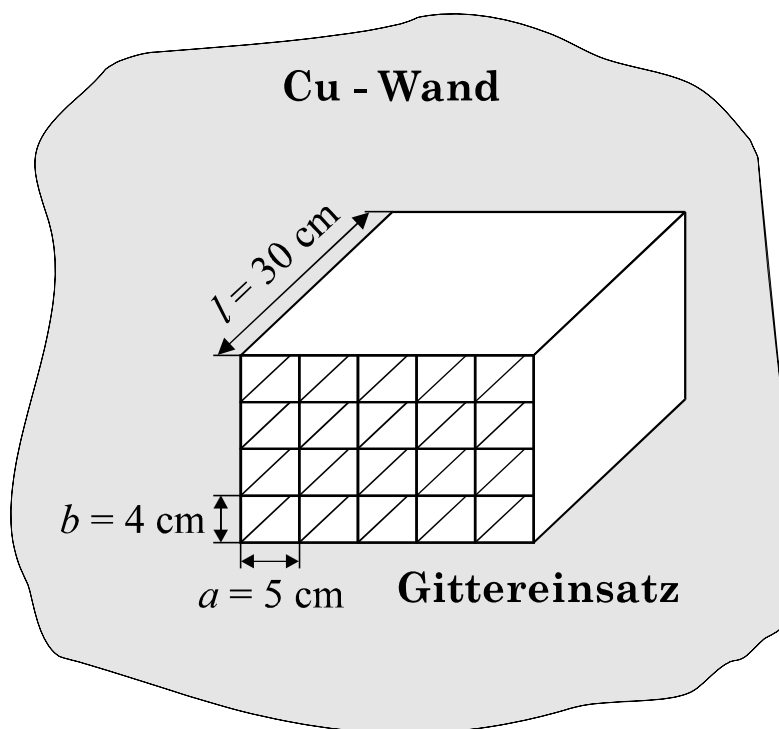
- a) Ab welchem Einfallswinkel tritt Totalreflexion ein? [  $\theta_c = 6,38^\circ$  ]
- b) Falls der Einfallswinkel  $\theta_1 = 45^\circ$  beträgt, wie groß ist dann der Betrag der Feldstärke im Luftraum
- I. direkt am Ort der Trennfläche? [  $|\underline{E}_t(z=0)| = 1,42 \text{ V/m}$  ]
  - II.  $\lambda_0/4$  von der Trennfläche entfernt? [  $|\underline{E}_t(z=\lambda_0/4)| = 73,2 \mu\text{V/m}$  ]



## Hohlleiter

### Aufgabe 1:

Eine Messkabine soll durch eine Auskleidung mit 0,5 mm dickem Kupferblech der elektrischen Leitfähigkeit  $\kappa_{\text{Cu}} = 57 \cdot 10^6 \text{ A}/(\text{Vm})$  gegen elektromagnetische Störfelder geschirmt werden. Zu Beleuchtungszwecken ist ein Fenster vorgesehen, in welchem sich ein aus Blechen gefertigter Gittereinsatz befindet, der aus einer Vielzahl paralleler Rechteckrohre mit den Innenmaßen 5 cm x 4 cm bei 30 cm Länge besteht.



Berechnen Sie näherungsweise folgende Werte und geben Sie jeweils eine physikalische Begründung für Ihren Ansatz an.

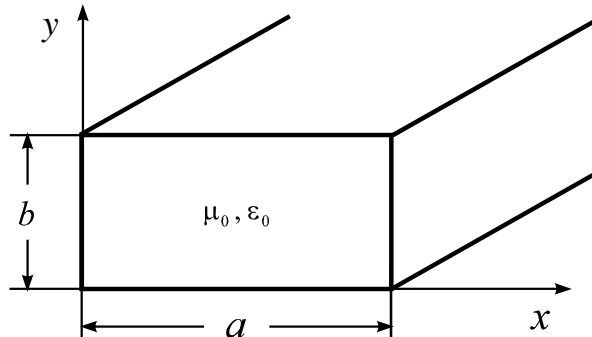
- a) Bei welcher tiefsten Frequenz kann man eine Schirmdämpfung von 80 dB gerade noch erreichen? [ $f_{\text{min}} = 1,5 \text{ MHz}$ ]

**Hinweis:** Bei dieser Dämpfung ist von einer äußeren Störfeldstärke im inneren nur noch 0,01 % nachweisbar.

- b) Bei welcher höchsten Frequenz ist die geforderte Schirmdämpfung gerade noch erzielbar? [ $f_{\text{max}} = 2,6 \text{ GHz}$ ]

**Aufgabe 2:**

Sie sollen die Querabmessungen  $a$  und  $b$  eines Rechteckhohlleiters dimensionieren.

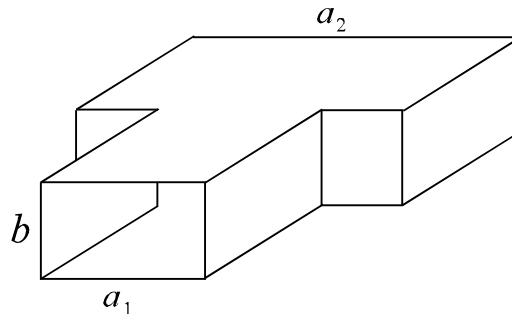


Der Hohlleiter soll bei  $f = 10$  GHz mit der  $H_{10}$ -Welle betrieben werden.

- Wie groß muss die Hohlleiterbreite  $a$  gewählt werden, damit die  $H_{10}$ -Welle 25 % oberhalb ihrer cutoff-Frequenz liegt? [ $a = 1,874$  cm]
- Wie groß muss die Hohlleiterhöhe  $b$  gewählt werden, damit die  $H_{01}$ -Welle 25 % unterhalb ihrer cutoff-Frequenz liegt? [ $b = 1,124$  cm]
- Geben Sie in GHz die cutoff-Frequenzen der  $H_{10}$ -,  $H_{01}$ - und  $H_{11}$ -Welle an, wenn Sie die Querabmessungen wie in den Aufgabenteilen **a)** und **b)** wählen.  
[ $f_c^{H_{10}} = 8$  GHz,  $f_c^{H_{01}} = 13,33$  GHz,  $f_c^{H_{11}} = 15,55$  GHz]

**Aufgabe 3:**

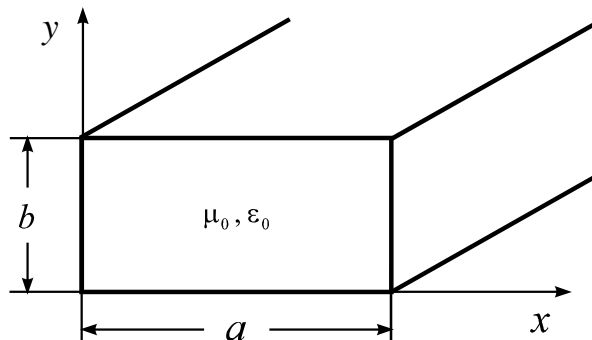
Ein luftgefüllter Rechteckhohlleiter der Breite  $a_1$  und der Höhe  $b$  mit  $a_1 > b$  wird mit seiner Grundwelle betrieben.



Der Hohlleiter erweitere sich sprunghaft in der H-Ebene auf die neue Breite  $a_2 > a_1$ . Die Höhe  $b$  bleibe unverändert.

- Wie hoch muss die Betriebsfrequenz  $f_{\min}$  mindestens sein, damit im kleineren Hohlleiter die Grundwelle ausbreitungsfähig ist? [ $f_{\min} = c_0 / (2 a_1)$ ]
- Wie hoch darf die Betriebsfrequenz  $f_{\max}$  höchstens werden, damit im größeren Hohlleiter keine Oberwelle ausbreitungsfähig ist? [ $f_{\max} = c_0 / a_2$ ]
- Welche nutzbare Bandbreite  $B = f_{\max} - f_{\min}$  hat demnach der Hohlleiterübergang für  $a_1 = 40,39 \text{ mm}$  und  $a_2 = 1,5 \cdot a_1$ ? [ $B = 1,237 \text{ GHz}$ ]



**Aufgabe 4:**

- a) Zeichnen Sie die transversalen Feldbilder der  $E_{13}$  und der  $H_{05}$  - Welle in obigem Rechteckhohlleiter.
- b) Bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeiten der  $E_{13}$  und der  $H_{05}$  - Welle in obigem Rechteckhohlleiter. [  $v_p = c_0 / \sqrt{1 - (m\pi/ka)^2 - (n\pi/kb)^2}$  ]
- c) In welchem Verhältnis müssen die Kantenlängen  $a$  und  $b$  dieses Rechteckhohlleiters stehen, damit die beiden Phasengeschwindigkeiten aus **b)** gleich werden? [  $b = 4a$  ]
- d) Für welches andere Kantenverhältnis  $a/b$  wird bei gegebenem Umfang  $U = 2(a + b)$  die Gruppengeschwindigkeit der  $E_{11}$ -Welle maximal? [  $a/b = 1$  ]  
Wie groß ist dann dieser Maximalwert, falls gilt:  $ka = 2\pi$ ? [  $v_g = 2,12 \cdot 10^8$  m/s ]

**Aufgabe 5:**

Wie heißen die ersten 6 Eigenwellen in einem Rechteckhohlleiter für

a) ein Kantenverhältnis von  $a/b = 1$ ,  $[H_{10} + H_{01}, H_{11} + E_{11}, H_{20} + H_{02}]$

b) ein Kantenverhältnis von  $a/b = 2$  und  $[H_{10}, H_{20} + H_{01}, H_{11} + E_{11}, H_{21} + E_{21}]$

c) ein Kantenverhältnis von  $a/b = 3$ ?  $[H_{10}, H_{20}, H_{01} + H_{30}, H_{11} + E_{11}]$

**Hinweis:** Benutzen Sie die Beziehung

$$\frac{f_c^{mn}}{f_c^{10}} = \sqrt{m^2 + (a/b)^2 n^2}$$

und tragen Sie die Wellen an der richtigen Stelle ein.

