



Vektoranalysis + Vektoralgebra

Aufgabe 1:

Welchen Wert hat die Divergenz des Vektorfeldes

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x 5 x^2 \sin \frac{\pi x}{2}$$

an der Stelle $x = 1$? [$\operatorname{div} \mathbf{A}(x=1) = 10$]

Aufgabe 2:

Berechnen Sie den Ausdruck $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$ für das Vektorfeld

$$\mathbf{A} = 3 x z^2 \mathbf{e}_x - y z \mathbf{e}_y + (x + 2 z) \mathbf{e}_z .$$

[$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -6 x \mathbf{e}_x + (6 z - 1) \mathbf{e}_z$]

Aufgabe 3:

Gegeben ist die skalare Ortsfunktion

$$\Phi(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2} .$$

a) Berechnen Sie den Gradienten von Φ in kartesischen Koordinaten.

$$\left[\operatorname{grad} \Phi = -\frac{2 x z \mathbf{e}_x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2 y z \mathbf{e}_y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\mathbf{e}_z}{x^2 + y^2} \right]$$

b) Formen Sie das Ergebnis in zylindrische Koordinaten um.

$$\left[\operatorname{grad} \Phi = -\frac{2 z \mathbf{e}_\rho}{\rho^3} + \frac{\mathbf{e}_z}{\rho^2} \right]$$

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{0} .$$



TEM - Wellen

Aufgabe 1:

Die komplexe Amplitude der elektrischen Feldstärke einer TEM-Welle wird mit $0 \leq \delta \leq \pi/2$ durch folgenden Ausdruck beschrieben:

$$\vec{\underline{E}}(z) = E_0 \left(e^{j\delta} \vec{e}_x + e^{-j\delta} \vec{e}_y \right) e^{-jk_0 z} .$$

a) Wie lautet die reelle Zeitfunktion $\vec{E}(z, t)$?

$$[\vec{E}(z, t) = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t - k_0 z + \delta) + E_0 \vec{e}_y \cos(\omega t - k_0 z - \delta)]$$

b) Wie groß muss δ gewählt werden, damit folgende Polarisation vorliegt:

- lineare Polarisation, [$\delta = 0$ oder $\delta = \pi/2$]
- zirkulare Polarisation ? [$\delta = \pi/4$]

c) Es gelte $E_0 = 1 \text{ V/m}$ und $\delta = 0$. Welche Wirkleistung wird im zeitlichen Mittel innerhalb einer Phasenfront von 1 m^2 transportiert ? [$P = 2,655 \text{ mW}$]

Aufgabe 2:

Eine TEM-Welle breitet sich in Meerwasser mit den Materialkonstanten $\epsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$ und $\kappa = 5 \text{ S/m}$ aus.

a) Es sei $f = 25 \text{ kHz}$. Nach welcher Distanz d_1 ist die TEM-Welle um 20 dB gedämpft? [$d_1 = 3,278 \text{ m}$]

b) Nun gelte $f = 25 \text{ MHz}$. Nach welcher Distanz d_2 ist jetzt die TEM-Welle um 20 dB gedämpft? [$d_2 = 0,105 \text{ m}$]

Aufgabe 3:

Gegeben ist ein gerader, zylindrischer, massiver Leiter mit kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser $D = 200 \mu\text{m}$, Material Kupfer).

a) Wie groß ist der Gleichstromwiderstandsbelag $R'_0 = R_0/l$ des Leiters ?

$$[R'_0 = 0,558 \Omega/\text{m}]$$

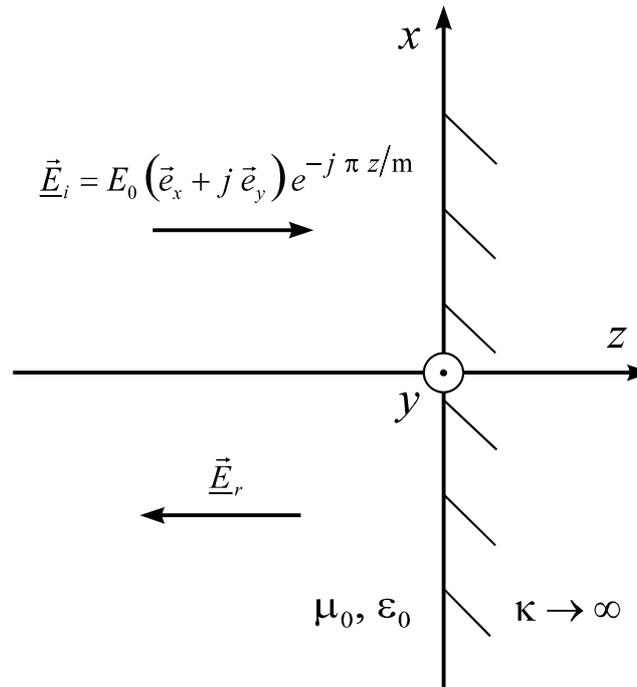
b) Um welchen Faktor steigt der HF-Widerstand bei den Frequenzen $f = 100 \text{ MHz}$ und $f = 10 \text{ GHz}$ jeweils gegenüber dem Gleichstromwiderstand an ? [$R_{HF}/R_0 = 7,5$ bzw. $R_{HF}/R_0 = 75$]



Grenzflächen

Aufgabe 1:

Eine homogene TEM-Welle mit einer zeitgemittelten Leistungsdichte von $S_i = 1 \text{ W/m}^2$ trifft, vom freien Raum (μ_0, ϵ_0) kommend, bei $z = 0$ senkrecht auf eine elektrisch ideal leitende Wand ($\kappa \rightarrow \infty$).



Das gesamte elektrische Feld vor der Wand erhält man aus:

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_i + \underline{\vec{E}}_r .$$

- Welche Frequenz f hat die einfallende Welle? [$f = 150 \text{ MHz}$]
- Bestimmen Sie den Zahlenwert von E_0 . [$E_0 = 19,41 \text{ V/m}$]
- Berechnen Sie die reflektierte Welle $\underline{\vec{E}}_r$. [$\underline{\vec{E}}_r = -E_0(\vec{e}_x + j \vec{e}_y)e^{j \pi z/m}$]
- Welche Polarisation hat die einfallende und welche die reflektierte Welle?
[einfallende: LHC und reflektierte: RHC]
- Bestimmen Sie am Ort $z = -\lambda_0/2$ das zeitabhängige Magnetfeld $\vec{H}(t)$, das sich aus einfallender und reflektierter Welle zusammensetzt.

$$[\vec{H}(t) = \frac{-2 E_0}{Z_0} (\vec{e}_y \cos \omega t + \vec{e}_x \sin \omega t)]$$

**Aufgabe 2:**

Eine TEM-Welle mit der Frequenz $f = 30 \text{ MHz}$ und der Amplitude $E_0 = 1 \text{ V/m}$ treffe senkrecht von oben auf die ebene Meeresoberfläche auf. In welcher Wassertiefe L ist die Amplitude der Welle auf 10^{-3} V/m abgesunken, wenn Meerwasser die Materialkonstanten $\epsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$ und $\kappa = 2,5 \text{ S/m}$ besitzt? Berechnen Sie zunächst den Durchlassfaktor und danach die Dämpfung im Meerwasser.

Hilfe:

$$\left| \frac{2}{1 + \sqrt{a - jb}} \right| = \frac{2}{\sqrt{(1 + \sqrt{c} \cos \varphi)^2 + c \sin^2 \varphi}} \quad \text{mit} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{-b}{a}.$$

$$[|d| = 0,0507, \alpha = 16,75 \text{ m}^{-1}, L = 23,4 \text{ cm}]$$

Aufgabe 3:

Eine ebene Welle soll in Luft senkrecht auf eine ebene Kupferplatte der elektrischen Leitfähigkeit $\kappa = 57 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ auftreffen. Die Dicke der Platte sei sehr viel größer als die Eindringtiefe δ , und es gelte $\kappa \gg \omega \epsilon_0$. Für denjenigen Anteil der hinlaufenden Energie, der reflektiert wird, gilt in sehr guter Näherung:

$$|\underline{r}|^2 = \frac{\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0} - \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega \epsilon_0} + 1}}{\frac{\kappa}{\omega \epsilon_0} + \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega \epsilon_0} + 1}}.$$

- a) Formen Sie diesen Ausdruck für $\kappa/(\omega \epsilon_0) \gg 1$ weiter um und zeigen Sie, dass näherungsweise gilt:

$$\boxed{|\underline{r}|^2 \approx 1 - 2 \frac{\omega}{c_0} \delta} \quad \text{mit der Eindringtiefe} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \kappa}}.$$

Hilfe: Machen Sie sinnvolle Vernachlässigungen und benutzen Sie $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$

- b) Welchen Wert hat $|\underline{r}|^2$ bei der Frequenz $f = 128,2 \text{ GHz}$?
- c) Wie groß ist dann der transmittierte Energieanteil?

Antworten: $|\underline{r}|^2 = 99,9 \%$ und $1 - |\underline{r}|^2 = 0,1 \%$

**Aufgabe 4:**

Eine TEM-Welle breitet sich mit der Amplitude $E_0 = 1 \text{ V/m}$ in destilliertem Wasser mit den Materialkonstanten $\epsilon_r = 81$, $\mu_r = 1$ und $\kappa = 0$ aus. Sie fällt s-polarisiert schräg auf eine ebene Trennfläche Wasser-Luft ein.

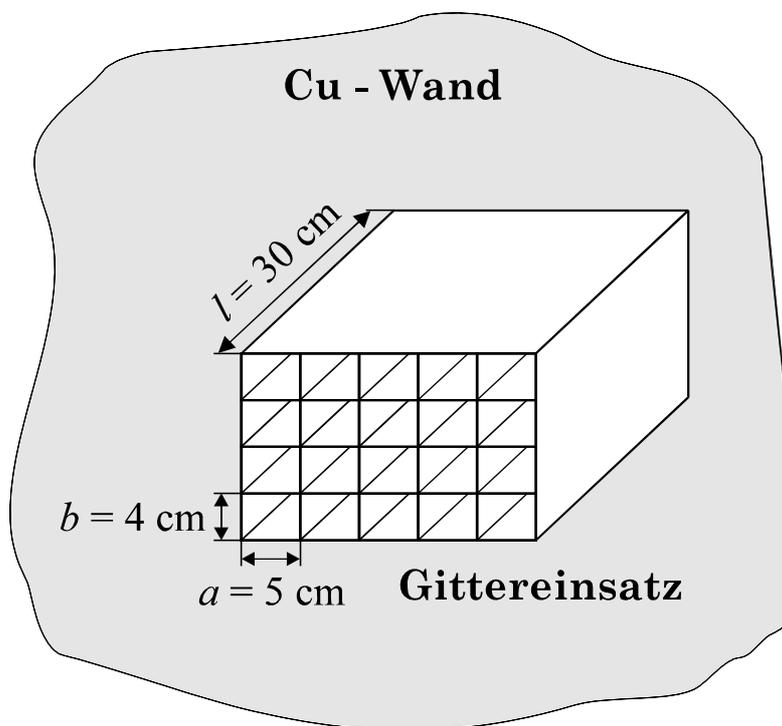
- a) Ab welchem Einfallswinkel tritt Totalreflexion ein? [$\theta_c = 6,38^\circ$]
- b) Falls der Einfallswinkel $\theta_1 = 45^\circ$ beträgt, wie groß ist dann der Betrag der Feldstärke im Luftraum
- I. direkt am Ort der Trennfläche? [$|\underline{E}_t(z=0)| = 1,42 \text{ V/m}$]
 - II. $\lambda_0/4$ von der Trennfläche entfernt? [$|\underline{E}_t(z=\lambda_0/4)| = 73,2 \mu\text{V/m}$]



Hohlleiter

Aufgabe 1:

Eine Messkabine soll durch eine Auskleidung mit 0,5 mm dickem Kupferblech der elektrischen Leitfähigkeit $\kappa_{\text{Cu}} = 57 \cdot 10^6 \text{ A}/(\text{Vm})$ gegen elektromagnetische Störfelder geschirmt werden. Zu Beleuchtungszwecken ist ein Fenster vorgesehen, in welchem sich ein aus Blechen gefertigter Gittereinsatz befindet, der aus einer Vielzahl paralleler Rechteckrohre mit den Innenmaßen 5 cm x 4 cm bei 30 cm Länge besteht.



Berechnen Sie näherungsweise folgende Werte und geben Sie jeweils eine physikalische Begründung für Ihren Ansatz an.

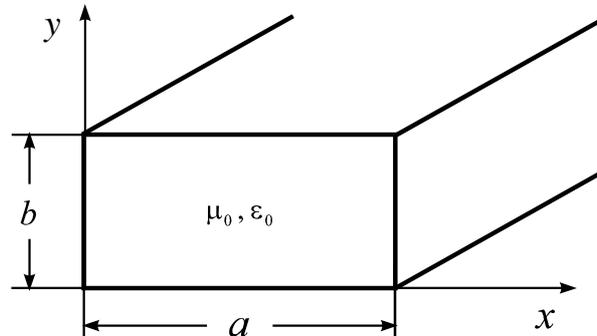
- a) Bei welcher tiefsten Frequenz kann man eine Schirmdämpfung von 80 dB gerade noch erreichen? [$f_{\text{min}} = 1,5 \text{ MHz}$]

Hinweis: Bei dieser Dämpfung ist von einer äußeren Störfeldstärke im inneren nur noch 0,01 % nachweisbar.

- b) Bei welcher höchsten Frequenz ist die geforderte Schirmdämpfung gerade noch erzielbar? [$f_{\text{max}} = 2,6 \text{ GHz}$]

**Aufgabe 2:**

Sie sollen die Querabmessungen a und b eines Rechteckhohlleiters dimensionieren.

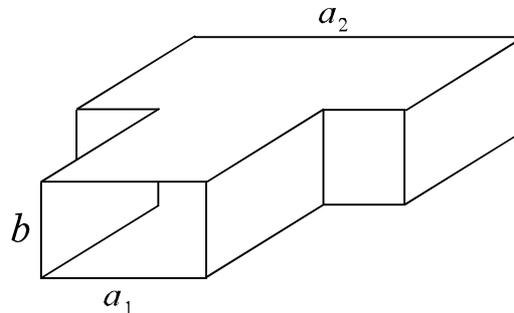


Der Hohlleiter soll bei $f = 10$ GHz mit der H_{10} -Welle betrieben werden.

- a) Wie groß muss die Hohlleiterbreite a gewählt werden, damit die H_{10} -Welle 25 % oberhalb ihrer cutoff-Frequenz liegt ? [$a = 1,874$ cm]
- b) Wie groß muss die Hohlleiterhöhe b gewählt werden, damit die H_{01} -Welle 25 % unterhalb ihrer cutoff-Frequenz liegt ? [$b = 1,124$ cm]
- c) Geben Sie in GHz die cutoff-Frequenzen der H_{10} -, H_{01} - und H_{11} -Welle an, wenn Sie die Querabmessungen wie in den Aufgabenteilen a) und b) wählen.
[$f_c^{H_{10}} = 8$ GHz, $f_c^{H_{01}} = 13,33$ GHz, $f_c^{H_{11}} = 15,55$ GHz]

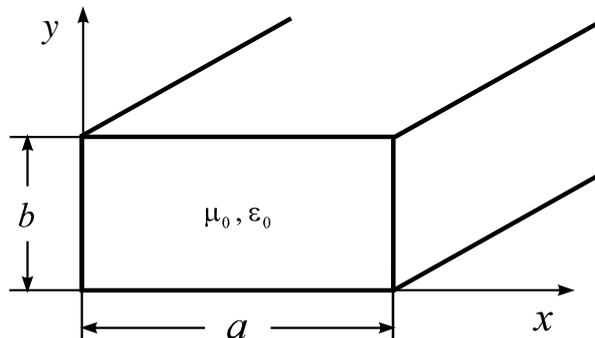
**Aufgabe 3:**

Ein luftgefüllter Rechteckhohlleiter der Breite a_1 und der Höhe b mit $a_1 > b$ wird mit seiner Grundwelle betrieben.



Der Hohlleiter erweitere sich sprunghaft in der H-Ebene auf die neue Breite $a_2 > a_1$. Die Höhe b bleibe unverändert.

- Wie hoch muss die Betriebsfrequenz f_{\min} mindestens sein, damit im kleineren Hohlleiter die Grundwelle ausbreitungsfähig ist? [$f_{\min} = c_0/(2 a_1)$]
- Wie hoch darf die Betriebsfrequenz f_{\max} höchstens werden, damit im größeren Hohlleiter keine Oberwelle ausbreitungsfähig ist? [$f_{\max} = c_0/a_2$]
- Welche nutzbare Bandbreite $B = f_{\max} - f_{\min}$ hat demnach der Hohlleiterübergang für $a_1 = 40,39$ mm und $a_2 = 1,5 \cdot a_1$? [$B = 1,237$ GHz]

**Aufgabe 4:**

- a) Zeichnen Sie die transversalen Feldbilder der E_{13} und der H_{05} - Welle in obigem Rechteckhohlleiter.
- b) Bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeiten der E_{13} und der H_{05} - Welle in obigem Rechteckhohlleiter. [$v_p = c_0 / \sqrt{1 - (m\pi/ka)^2 - (n\pi/kb)^2}$]
- c) In welchem Verhältnis müssen die Kantenlängen a und b dieses Rechteckhohlleiters stehen, damit die beiden Phasengeschwindigkeiten aus b) gleich werden? [$b = 4a$]
- d) Für welches andere Kantenverhältnis a/b wird bei gegebenem Umfang $U = 2(a + b)$ die Gruppengeschwindigkeit der E_{11} -Welle maximal? [$a/b = 1$]
Wie groß ist dann dieser Maximalwert, falls gilt: $ka = 2\pi$? [$v_g = 2,12 \cdot 10^8$ m/s]

**Aufgabe 5:**

Wie heißen die ersten 6 Eigenwellen in einem Rechteckhohlleiter für

a) ein Kantenverhältnis von $a/b = 1$, $[H_{10} + H_{01}, H_{11} + E_{11}, H_{20} + H_{02}]$

b) ein Kantenverhältnis von $a/b = 2$ und $[H_{10}, H_{20} + H_{01}, H_{11} + E_{11}, H_{21} + E_{21}]$

c) ein Kantenverhältnis von $a/b = 3$? $[H_{10}, H_{20}, H_{01} + H_{30}, H_{11} + E_{11}]$

Hinweis: Benutzen Sie die Beziehung

$$\frac{f_c^{mn}}{f_c^{10}} = \sqrt{m^2 + (a/b)^2 n^2}$$

und tragen Sie die Wellen an der richtigen Stelle ein.

