

Zum Tunneleffekt in Cutoff-Bereichen von Hohlleitern

K. W. Kark

Institut für Nachrichtentechnik der Fachhochschule Ravensburg-Weingarten, Postfach 1261, D-88241 Weingarten, <http://www.fh-weingarten.de/~kark>, Tel.: 0751 / 501-9591, Fax: 0751 / 501-9876, e-mail: kark@fh-weingarten.de

Übersicht. Inhomogene Hohlleiter mit Cutoff-Bereichen zeigen hinsichtlich der Transmission von Signalen bemerkenswerte Effekte. In ihnen können sowohl die Gruppen- als auch die Phasengeschwindigkeit negativ oder auch beliebig groß werden. Trotzdem bleibt in allen Fällen die Signalübertragung kausal und niemals bewegt sich Energie schneller als das Licht. Neben einer systematischen Untersuchung des elektromagnetischen Tunneleffekts hinsichtlich der Intensität des transmittierten Signals werden verschiedene Geschwindigkeitsmodelle beim Tunnelvorgang näher betrachtet.

Abstract. The transmission of signals in inhomogeneous waveguides with cutoff sections is treated. In such media not only the phase velocity but also the group velocity can be negative or even unbounded. Nevertheless the transmission of signals is always causal and energy does never travel faster than light. In addition to the intensity of the transmitted signal we also investigate the speed of electromagnetic tunnelling using different definitions of velocity.

1 Einleitung

Wenn bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen die Phasenkonstante $\beta(\omega)$ nichtlinear von der Frequenz ω abhängt, dann spricht man von einem dispersiven Medium [1]. Bei Vorliegen von Dispersion wird die Geschwindigkeit der Wellenausbreitung frequenzabhängig, was bei der Übertragung breitbandiger Signale zu linearen Verzerrungen führt. U. a. unterscheidet man zwischen Phasen-, Gruppen-, Front- und Energiegeschwindigkeit [2, 14, 15, 16, 18].

Phasengeschwindigkeit	Gruppengeschwindigkeit	Frontgeschwindigkeit	Energiegeschwindigkeit
$v_p(\omega) = \frac{\omega}{\beta(\omega)}$	$v_g(\omega) = \frac{1}{d\beta(\omega)/d\omega}$	$v_F = \lim_{\omega \rightarrow \infty} v_p(\omega) = c_0$	$\vec{v}_E(\omega) = \frac{\vec{S}_R}{W} = \frac{\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \}}{\frac{\epsilon}{4} \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{\mu}{4} \vec{H} \cdot \vec{H}^*}$

Für Systeme, die durch eine komplexe Übertragungsfunktion als Fourier-Transformierte der Impulsantwort

$$\underline{H}(\omega) = |\underline{H}(\omega)| e^{j\Phi(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

beschrieben werden können, definiert man neben den Geschwindigkeiten auch folgende Laufzeiten zwischen Eingangs- und Ausgangsseite [7, 8, 13, 17].

Phasenlaufzeit	Gruppenlaufzeit	Schwerpunktlaufzeit	Impulslaufzeit
$t_p(\omega) = -\frac{\Phi(\omega)}{\omega}$	$t_g(\omega) = -\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega}$	$t_s = \frac{\int_0^{\infty} t h(t) dt}{\int_0^{\infty} h(t) dt}$	$t_i = \frac{\int_0^{\infty} t h^2(t) dt}{\int_0^{\infty} h^2(t) dt}$

In der Maxwellschen Elektrodynamik können sowohl die Phasen- als auch die Gruppengeschwindigkeit die Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 überschreiten. Im Folgenden wird gezeigt, dass bei der Durchtunnelung von evaneszenten Hohlleiterabschnitten, zwar $v_g > c_0$ werden kann, doch breitet sich ein Signal, d.h. seine Energie, niemals schneller als das Licht aus und jede Signalübertragung ist daher stets kausal. Die Diskussion dieser Laufzeiteffekte erfolgt im Abschnitt 3 am Beispiel des Einschwingvorgangs bei der Übertragung von Impulsen durch eine evaneszente Hohlleiterverengung. Die Intensität eines getunnelten Signals wird im Abschnitt 2 bei einem Hohlleiter mit unterbrochenem Stoffeinsatz genauer untersucht und kann hier sogar noch in geschlossener Form dargestellt werden.

2 Hohlleiter mit unterbrochenem Stoffeinsatz

Ein geradliniger Hohlleiter rechteckigen Querschnitts sei mit einem verlustlosen Dielektrikum der Permittivität $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ gefüllt. Die Füllung erstreckt sich in den Bereichen $-\infty < z \leq 0$ und $l \leq z < \infty$, die als Raumteile ① und ③ bezeichnet werden. Den dazwischen liegenden Bereich wollen wir wie in **Bild 1** Raumteil ② nennen. Die eingeschwingene, harmonische Anregung des Wellenleiters erfolgt im Raumteil ① durch eine H_{mn} -Welle. Sie kommt von $z = -\infty$ und läuft in \vec{e}_z -Richtung. Die Zeitabhängigkeit wollen wir mit $e^{j\omega t}$ ansetzen. Der weitere Rechengang verläuft daher wie üblich mit komplexen Amplituden, deren komplexe Eigenschaft durch Unterstreichen kenntlich gemacht wird. Die gleiche Struktur wurde auch in [4] hinsichtlich der Aufenthaltsdauer von Impulsen im Raumteil ② betrachtet. Unsere Arbeit soll sich dagegen mit der Intensität des transmittierten Signals beschäftigen.

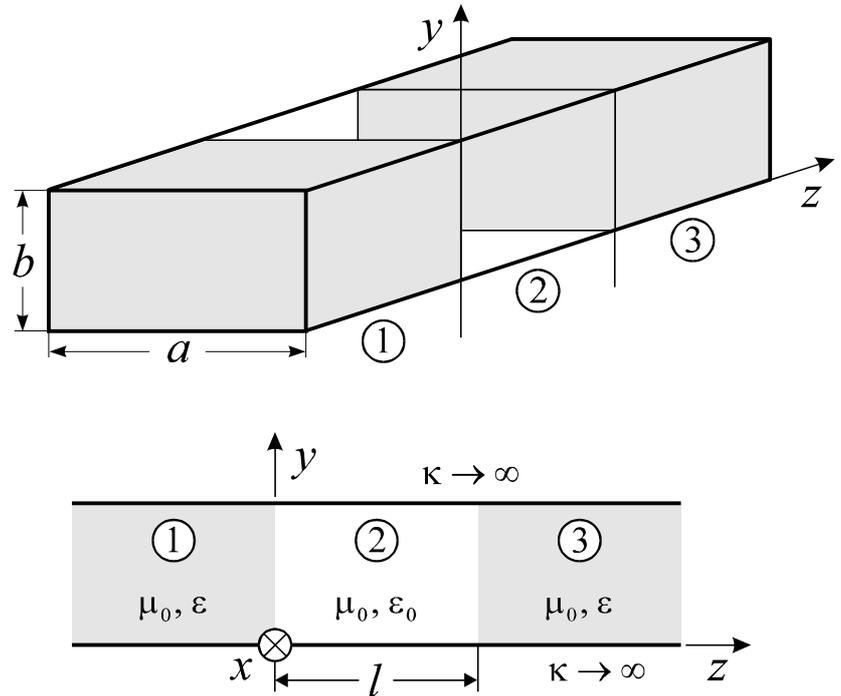


Bild 1: Hohlleiter mit unterbrochenem Stoffeinsatz. Bei geeigneter Frequenzwahl kann eine H_{mn} -Welle in den Raumteilen ① und ③ ausbreitungsfähig und in ② cutoff sein.

2.1 Der Feldansatz mit H_{mn} -Wellen

Durch Reflexionen an den senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehenden Trennflächen bei $z = 0$ und $z = l$ werden hin- und rücklaufende H_{mn} -Wellen angeregt. In den drei Raumteilen machen wir deshalb zur Erfüllung der Stetigkeit an den Raumteilgrenzen folgenden Vektorpotentialansatz $\vec{A} = \underline{A}_z \vec{e}_z$, der mit $\vec{E} = \text{rot } \vec{A}$ bereits die Randbedingungen auf den vier Hohlleiterinnenwänden erfüllt:

$$\begin{aligned} \underline{A}_z^{(1)} &= \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} \left(\underline{C}_0 e^{-\underline{\gamma}_1 z} + \underline{C}_1 e^{\underline{\gamma}_1 z} \right) \\ \underline{A}_z^{(2)} &= \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} \left(\underline{C}_2 e^{-\underline{\gamma}_2 z} + \underline{C}_3 e^{\underline{\gamma}_2 z} \right) \\ \underline{A}_z^{(3)} &= \cos \frac{m \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{b} \left(\underline{C}_4 e^{-\underline{\gamma}_3 (z-l)} + \underline{C}_5 e^{\underline{\gamma}_3 (z-l)} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Dabei ist \underline{C}_0 eine Konstante, die durch die Art der Anregung eindeutig festgelegt ist. Da bei dem vorliegenden Problem im Raumteil ③ nur eine H_{mn} -Welle in Richtung der positiven z -Achse läuft, können wir sofort $\underline{C}_5 = 0$ setzen. Die Generatorfrequenz sei so hoch, dass wir in den Raumteilen ① und ③, die gleiche Materialkonstanten aufweisen, von einer ausbreitungsfähigen H_{mn} -Welle ausgehen können. Im Raumteil ②, der keine Füllung enthält, ist die Wellenlänge dagegen größer. Die dort vorhandenen hin- und rücklaufenden Wellen können daher durchaus auch zu den nicht ausbreitungsfähigen Dämpfungstypen gehören. Für die Ausbreitungskonstanten in den drei Raumteilen gilt daher

$$\underline{\gamma}_1 = \underline{\gamma}_3 = j \beta_1 = j \sqrt{\varepsilon_r \omega^2 - \omega_c^2} / c_0 \quad \text{für } \omega \geq \omega_c / \sqrt{\varepsilon_r} \quad (3)$$

$$\underline{\gamma}_2 = \begin{cases} \alpha_2 = \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2} / c_0 & \text{für } \omega \leq \omega_c \\ j \beta_2 = j \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} / c_0 & \text{für } \omega \geq \omega_c \end{cases} \quad (4)$$

mit der Grenzfrequenz einer H_{mn} -Welle des ungefüllten Raumteils ②

$$\omega_c = c_0 \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} = 2\pi c_0/\lambda_c \quad (5)$$

und der Vakuumlichtgeschwindigkeit $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Die vier unbekanntenen Wellenamplituden \underline{C}_1 , \underline{C}_2 , \underline{C}_3 und \underline{C}_4 erhält man aus den Stetigkeitsbedingungen der tangentialen elektrischen und magnetischen Feldstärke in den Trennflächen bei $z=0$ und $z=l$. Bei dem speziellen Problem aus **Bild 1** ist die Stetigkeit der Felder, dann erfüllt, wenn jeweils das Vektorpotential und seine Normalableitung stetig sind. So erhält man mit Hilfe von (2) vier Bedingungen, die man auch als Matrixgleichung formulieren kann:

$$\begin{aligned} \underline{C}_0 + \underline{C}_1 &= \underline{C}_2 + \underline{C}_3 \\ \underline{\gamma}_1 (-\underline{C}_0 + \underline{C}_1) &= \underline{\gamma}_2 (-\underline{C}_2 + \underline{C}_3) \\ \underline{C}_2 e^{-\underline{\gamma}_2 l} + \underline{C}_3 e^{\underline{\gamma}_2 l} &= \underline{C}_4 \\ \underline{\gamma}_2 (-\underline{C}_2 e^{-\underline{\gamma}_2 l} + \underline{C}_3 e^{\underline{\gamma}_2 l}) &= -\underline{\gamma}_3 \underline{C}_4 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ \underline{\gamma}_1 & \underline{\gamma}_2 & -\underline{\gamma}_2 & 0 \\ 0 & e^{-\underline{\gamma}_2 l} & e^{\underline{\gamma}_2 l} & -1 \\ 0 & -\underline{\gamma}_2 e^{-\underline{\gamma}_2 l} & \underline{\gamma}_2 e^{\underline{\gamma}_2 l} & \underline{\gamma}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{C}_1 \\ \underline{C}_2 \\ \underline{C}_3 \\ \underline{C}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\underline{C}_0 \\ \underline{\gamma}_1 \underline{C}_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems lautet:

$$\begin{aligned} \underline{C}_1/\underline{C}_0 &= \frac{(\underline{Z}_1^2 - \underline{Z}_2^2)(e^{-\underline{\gamma}_2 l} - e^{\underline{\gamma}_2 l})}{\underline{N}} = \underline{r} & \underline{C}_2/\underline{C}_0 &= \frac{2\underline{Z}_2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)e^{\underline{\gamma}_2 l}}{\underline{N}} \\ \underline{C}_3/\underline{C}_0 &= \frac{2\underline{Z}_2(\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2)e^{-\underline{\gamma}_2 l}}{\underline{N}} & \underline{C}_4/\underline{C}_0 &= \frac{4\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{N}} = \underline{d} \end{aligned} \quad (7)$$

mit dem stets gleichen Nenner

$$\underline{N} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)^2 e^{\underline{\gamma}_2 l} - (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2)^2 e^{-\underline{\gamma}_2 l} \quad (8)$$

und den Feldwellenimpedanzen der H_{mn} -Wellen in den Rechteckhohlleitern $\underline{Z}_i = j\omega\mu_0/\underline{\gamma}_i$ für $i=1,2,3$. Eine ausbreitungsfähige Welle hat eine reelle Feldwellenimpedanz, während bei Cutoff-Wellen ein imaginärer Wert auftritt.

2.2 Die transmittierte Energie

Wir wollen untersuchen, mit welcher Intensität ein Signal nach Durchtunnelung einer Cutoff-Barriere wie in **Bild 1** gemessen werden kann. In (7) wurden die komplexen Reflexions- und Durchlassfaktoren $\underline{r} = \underline{C}_1/\underline{C}_0$ und $\underline{d} = \underline{C}_4/\underline{C}_0$ definiert. Mit ihrer Hilfe kann man den Reflexionskoeffizienten

$$R = |\underline{r}|^2 = \left| \frac{\underline{C}_1}{\underline{C}_0} \right|^2 = \frac{\left| (\underline{Z}_1^2 - \underline{Z}_2^2)(e^{-\underline{\gamma}_2 l} - e^{\underline{\gamma}_2 l}) \right|^2}{\left| (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)^2 e^{\underline{\gamma}_2 l} - (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2)^2 e^{-\underline{\gamma}_2 l} \right|^2} \quad (9)$$

bestimmen, der angibt wie viel Prozent der einfallenden Leistung am Raumteil ② reflektiert wird, während der Transmissionskoeffizient

$$T = |\underline{d}|^2 = \left| \frac{\underline{C}_4}{\underline{C}_0} \right|^2 = \frac{|4\underline{Z}_1\underline{Z}_2|^2}{\left| (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)^2 e^{\underline{\gamma}_2 l} - (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2)^2 e^{-\underline{\gamma}_2 l} \right|^2} \quad (10)$$

den Leistungsanteil angibt, der in den Raumteil ③ eindringen kann. Aus Gründen der Energieerhaltung gilt stets $R+T=1$. Man beachte, dass aufgrund gleicher Feldwellenimpedanzen in den Raumteilen ① und ③ keine Impedanz-

transformation stattfindet, sonst würde die Energieerhaltung nämlich $R + T \underline{Z}_1 / \underline{Z}_3 = 1$ lauten. Nach kurzer Umformung folgt unter Beachtung von (3) und (4):

$$T = \frac{(2 \beta_1 \alpha_2)^2}{(2 \beta_1 \alpha_2)^2 + \sinh^2(\alpha_2 l) (\beta_1^2 + \alpha_2^2)^2} \quad \text{für} \quad \frac{\omega_c}{\sqrt{\epsilon_r}} \leq \omega \leq \omega_c \quad (11)$$

$$T = \frac{(2 \beta_1 \beta_2)^2}{(2 \beta_1 \beta_2)^2 + \sin^2(\beta_2 l) (\beta_1^2 - \beta_2^2)^2} \quad \text{für} \quad \omega \geq \omega_c . \quad (12)$$

Im Bereich $\omega \leq \omega_c$ ist für $\alpha_2 l \gg 1$ die transmittierte Welle im Raumteil ② einer starker Dämpfung ausgesetzt und aus der exakten Formel (11) kann man eine einfache Näherung ableiten:

$$T|_{\omega \leq \omega_c, \alpha_2 l \gg 1} \approx \frac{16 (\beta_1 \alpha_2)^2}{(\beta_1^2 + \alpha_2^2)^2} e^{-2 \alpha_2 l} = \frac{16 e^{-2 \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2} l / c_0}}{\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_2}{\beta_1} \right)^2} . \quad (13)$$

Die Stärke der Transmission durch eine Cutoff-Barriere fällt also exponentiell mit der Länge l des Hohlleiters ② und der Quadratwurzel $\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}$. Zur numerischen Auswertung von T ist es sinnvoll, in eine normierte Darstellung überzuwechseln:

$$T = \frac{4}{4 + \sinh^2 \left(\delta \sqrt{1 - (\omega/\omega_c)^2} \right) \left(\sqrt{\frac{\epsilon_r (\omega/\omega_c)^2 - 1}{1 - (\omega/\omega_c)^2}} + \sqrt{\frac{1 - (\omega/\omega_c)^2}{\epsilon_r (\omega/\omega_c)^2 - 1}} \right)^2} \quad \text{für} \quad \frac{\omega_c}{\sqrt{\epsilon_r}} \leq \omega \leq \omega_c \quad (14)$$

$$T = \frac{4}{4 + \sin^2 \left(\delta \sqrt{(\omega/\omega_c)^2 - 1} \right) \left(\sqrt{\frac{\epsilon_r (\omega/\omega_c)^2 - 1}{(\omega/\omega_c)^2 - 1}} - \sqrt{\frac{(\omega/\omega_c)^2 - 1}{\epsilon_r (\omega/\omega_c)^2 - 1}} \right)^2} \quad \text{für} \quad \omega \geq \omega_c . \quad (15)$$

An der Grenzfrequenz $\omega = \omega_c$ gehen beide Darstellungen stetig ineinander über und es gilt

$$T|_{\omega = \omega_c} = \frac{4}{4 + \delta^2 (\epsilon_r - 1)} . \quad (16)$$

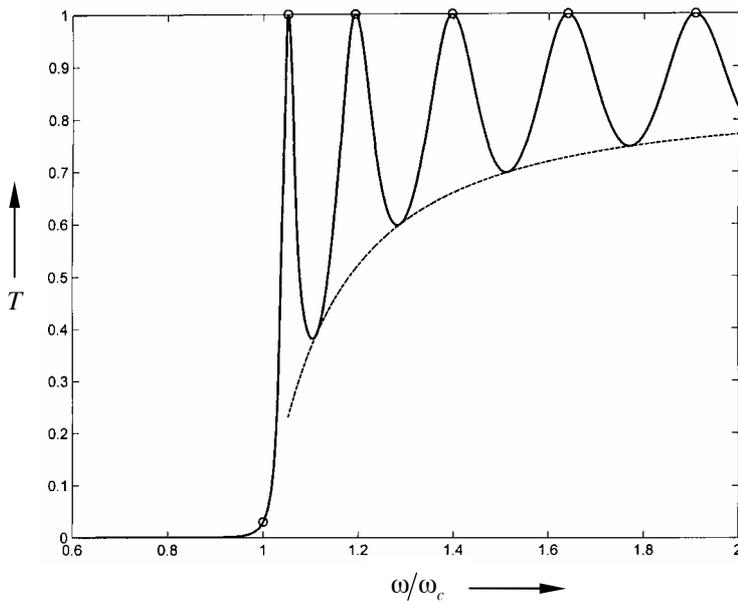
Im trivialen Fall $\epsilon_r = 1$ gilt natürlich auch $T = 1$. In (16) wurde mit (5) die bequeme Abkürzung

$$\delta = \frac{\omega_c l}{c_0} = \sqrt{\left(\frac{m \pi}{a/l} \right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b/l} \right)^2} \quad (17)$$

eingeführt. Deutlich oberhalb des Sperrbereichs der Barriere, also für $\omega \gg \omega_c$, folgt mit der Wellenzahl $k_0 = \omega/c_0$ aus (15) die asymptotische Näherung

$$T|_{\omega \gg \omega_c} \approx \frac{4}{4 + \sin^2(k_0 l) \left(\sqrt{\epsilon_r} - 1 / \sqrt{\epsilon_r} \right)^2} . \quad (18)$$

Als numerisches Beispiel wird der Transmissionskoeffizient T im Bereich $1/\sqrt{\epsilon_r} < \omega/\omega_c < 2$ für die geometrischen Abmessungen $a = 2,6 b$ und $l = 8 b$ mit $\epsilon_r = 2,37$ bei Einfall einer H_{10} -Welle in **Bild 2** dargestellt.



An der Grenzfrequenz des mittleren Hohlleiters wird für $m=1$ und $n=0$ gerade

$$T|_{\omega=\omega_c} = \frac{4}{4 + (\pi l/a)^2 (\epsilon_r - 1)} \approx 3,03\% \quad (19)$$

der einfallenden Leistung transmittiert. Die Minima im Bereich $\omega > \omega_c$ werden durch die Kurve

$$T = \frac{4}{4 + \left(\sqrt{\frac{\epsilon_r (\omega/\omega_c)^2 - 1}{(\omega/\omega_c)^2 - 1}} - \sqrt{\frac{(\omega/\omega_c)^2 - 1}{\epsilon_r (\omega/\omega_c)^2 - 1}} \right)^2} \quad (20)$$

asymptotisch eingegrenzt.

Bild 2: Transmissionskoeffizient T einer H_{10} -Welle im Hohlleiter mit unterbrochenem Stoffeinsatz $\epsilon_r = 2,37$. Neben geringer Transmission unterhalb der Grenzfrequenz ergibt sich ein resonantes Verhalten für $\omega > \omega_c$.

Vollständige Transmission (Kreismarkierungen bei $T = 1$) gibt es nach (15) für $\omega > \omega_c$ nur unter folgender Bedingung:

$$\delta \sqrt{(\omega/\omega_c)^2 - 1} = p \pi \quad \text{mit} \quad p = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (21)$$

D.h. mit (17) muss gelten

$$\omega/\omega_c = \sqrt{1 + \frac{(p \pi)^2}{\left(\frac{m \pi}{a/l}\right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b/l}\right)^2}} \quad \text{mit} \quad p = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (22)$$

In unserem Beispiel der einfallenden H_{10} -Welle gilt $m=1$ und $n=0$ und somit ist mit $p = 1, 2, 3, 4, \dots$

$$\omega/\omega_c = \sqrt{1 + (p a/l)^2} \quad (23)$$

Mit dem Verhältnis von Breite zu Länge $a/l = 2,6/8$ folgen die Frequenzen der Totaltransmission:

$$\omega/\omega_c = \sqrt{1 + (2,6 \cdot p/8)^2} \approx 1,051 \quad 1,193 \quad 1,397 \quad 1,640 \quad 1,908 \dots \quad (24)$$

An diesen Frequenzen wirkt der Raumteil ② wie ein Halbwellentransformator ($l = p \cdot \lambda_H / 2$) und ist daher für die einfallende Welle vollkommen transparent. Die Hohlleiterwellenlänge im Raumteil ② ist dabei wie folgt definiert:

$$\lambda_H = \frac{2 \pi}{\beta_2} = \frac{2 \pi c_0}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \quad (25)$$

2.3 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Aus dem Phasengang Φ des komplexen Transmissionsfaktors nach (7) und (8)

$$\underline{d} = \frac{4 \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)^2 e^{\underline{\gamma}_2 l} - (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2)^2 e^{-\underline{\gamma}_2 l}} = d e^{j \Phi} = \sqrt{T} e^{j \Phi} \quad (26)$$

wurde in [6] die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit durch den Raumteil ② der Länge l errechnet. Mit $k_0 = \omega/c_0$ gilt nämlich:

$$\frac{v_p(\omega)}{c_0} = -\frac{k_0 l}{\Phi(\omega)} \quad \text{und} \quad \frac{v_g(\omega)}{c_0} = -\frac{l}{d\Phi(\omega)/dk_0} . \quad (27)$$

In [6] wurde auch gezeigt, dass für zunehmende Frequenz die Phasengeschwindigkeit zunächst negativ ist, dann einen Pol mit Vorzeichenwechsel aufweist und sich von oben kommend asymptotisch der Lichtgeschwindigkeit annähert. Auch die Gruppengeschwindigkeit kann superluminal werden. Gerade bei starker Tunneldämpfung $\alpha_2 l \gg 1$ lassen sich für längere Tunnelbereiche im Prinzip beliebig hohe Gruppengeschwindigkeiten erreichen, ja sogar $v_g \rightarrow \infty$. Die Phase der transmittierten Welle wird dann nur noch von den Diskontinuitäten an den beiden Raumteilgrenzen bestimmt, wie wir im nächsten Abschnitt ebenfalls sehen werden. Daraus darf man aber nicht schließen, dass die Welle zum Durchdringen des Tunnels keine Zeit benötigt, da die Energiegeschwindigkeit v_E stets subluminal bleibt [6].

3 Hohlleiter mit Cutoff-Verengung

In einem dielektrisch gefüllten Hohlleiter gleichbleibenden Querschnitts kann man durch Unterbrechung der Füllung einen Raumteil mit nicht ausbreitungsfähiger Welle erzeugen (**Bild 1**). Ein ähnlicher Effekt entsteht durch eine ausreichend starke symmetrische Querschnittsverengung auf der Länge l eines ansonsten leeren Hohlleiters (**Bild 3**), der mit einer vertikal polarisierten H_{10} -Welle gespeist wird. Die Querschnittsabmessungen vor und nach der Verengung seien identisch.

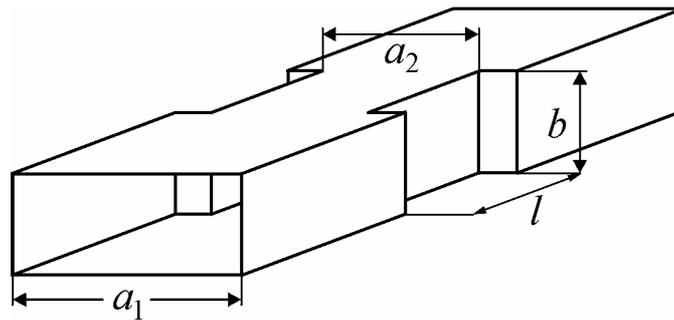


Bild 3: Tunneleffekt bei einer Hohlleiterverengung in der H-Ebene. Ein i.a. geringer Energieanteil kann die Cutoff-Barriere überwinden.

Ein Unterschied in beiden Anordnungen besteht darin, dass in ersterer nur ein einziger Wellentyp existiert, während in letzterer durch die Querschnittsänderungen auch höhere Eigenwellen angeregt werden, was die Analyse wesentlich aufwendiger macht. Die Streumatrix einer solchen Cutoff-Verengung wurde mit Hilfe der Methode der Orthogonalentwicklung [11, 12] exakt bestimmt. In jedem der drei Raumteile müssen vertikal polarisierte, ungerade H_{m0} -Wellen ($m = 1, 3, 5, \dots$) mit Vektorpotentialen von jeweils folgender Form angesetzt werden:

$$\underline{A}_z = \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m\pi x}{a} \left(\underline{a}_m e^{-\gamma_m z} + \underline{b}_m e^{\gamma_m z} \right) . \quad (28)$$

Alle weiteren Untersuchungen wurden an einer Verengung in der H-Ebene mit den Abmessungen $a_1 = 22,860$ mm, $a_2 = 15,799$ mm und $b = 10,160$ mm durchgeführt. Als Grenzfrequenzen der H_{10} -Grundwelle im breiten bzw. schmalen Hohlleiter erhält man $f_{c,1} = c_0/(2a_1) = 6,557$ GHz und $f_{c,2} = c_0/(2a_2) = 9,488$ GHz. Von besonderem Interesse hinsichtlich des Tunneleffektes ist also der evaneszente Frequenzbereich $6,557 \text{ GHz} \leq f \leq 9,488 \text{ GHz}$.

Unterhalb der Grenzfrequenz des Tunnels, also für $f < f_{c,2}$, kommt es zu keiner Wellenausbreitung mehr, sondern die Felder erfahren lediglich eine exponentielle, statische Dämpfung ohne Phasendrehung. Die Phase $\Phi(\omega)$ der nach dem Tunnel wieder neu angeregten H_{10} -Welle, die i.a. nur noch eine sehr kleine Amplitude besitzt, wird in diesem Frequenzbereich alleine durch die Art der Querschnittsprünge am Beginn und Ende der Verengung festgelegt und ist daher von der Länge l des Tunnels unabhängig. Darum ergibt sich wie in **Bild 4** für $f < f_{c,2}$ mit $t_g(\omega) = -d\Phi(\omega)/d\omega$ eine für jede Tunnelänge gleiche, positive Gruppenlaufzeit [5]. Alle drei Kurven werden dort deckungsgleich.

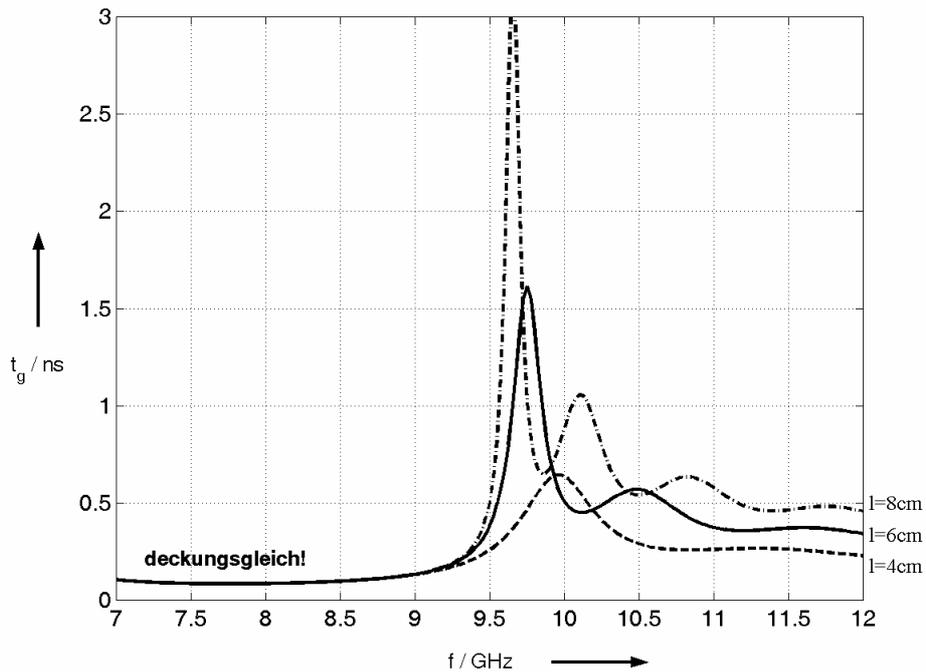


Bild 4: Gruppenlaufzeit eines H-Tunnels mit den Abmessungen $a_1 = 22,860$ mm, $a_2 = 15,799$ mm, $b = 10,160$ mm und der Grundwellengrenzfrequenz 9,488 GHz für verschiedene Tunnellängen $l = 4$ cm, 6 cm, 8 cm.

Die Zeitfunktion $x(t, z = 0)$ der einfallenden H_{10} -Welle am Tunnelleingang wird als einmaliger HF-Impuls der Trägerfrequenz $f = 8$ GHz mit einer gaußförmigen Einhüllenden modelliert (**Bild 6**). Die 60-dB-Impulsdauer betrage 10 ns, sodass sich das Eingangsspektrum $\underline{X}(\omega)$ im Wesentlichen auf den Bereich zwischen 7,5 und 8,5 GHz beschränkt (**Bild 5**). Bezüglich der Übertragungsfunktion $\underline{H}(\omega)$ des Tunnels, die formal dem Durchlassfaktor \underline{d} aus Abschnitt 2 entspricht, sind praktisch nur Spektralanteile im Cutoff-Bereich enthalten.

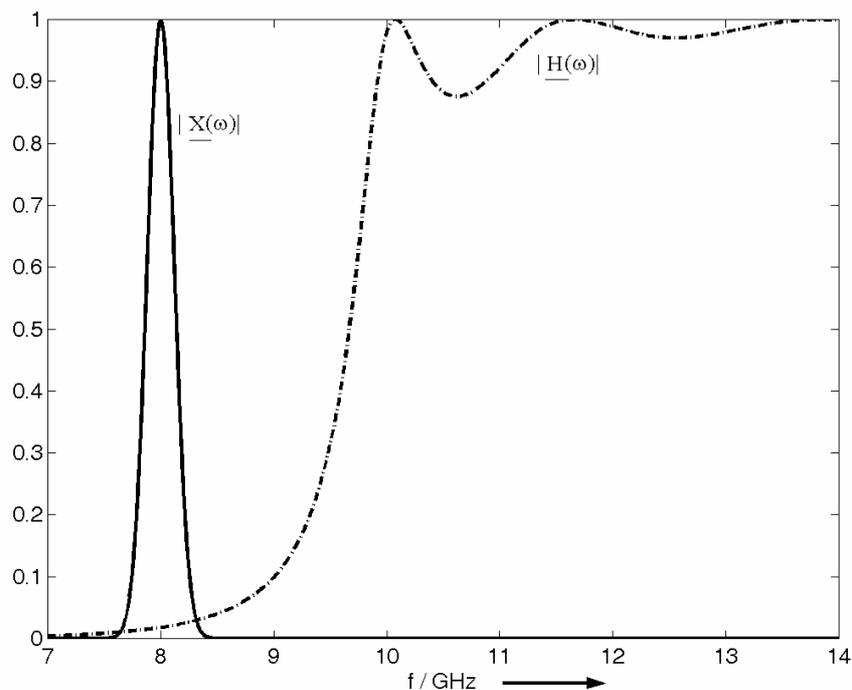


Bild 5: Betragsspektren eines modulierten Gaußimpulses als Eingangssignals $|\underline{X}(\omega)|$ und der Übertragungsfunktion $|\underline{H}(\omega)|$ für einen Tunnel der Länge $l = 4$ cm mit den Abmessungen $a_1 = 22,860$ mm, $a_2 = 15,799$ mm und $b = 10,160$ mm.

Im **Bild 6** wird das mit einer schnellen Fourier-Transformation (FFT) numerisch berechnete H_{10} -Signal $y(t, z=l)$ am Ausgang eines Tunnels der Länge $l = 4$ cm im Vergleich zum Eingangssignal $x(t, z=0)$ dargestellt. Das Maximum der Einhüllenden des Ausgangssignals stellt sich um $84,9$ ps später ein als das Maximum des Eingangshüllkurve.

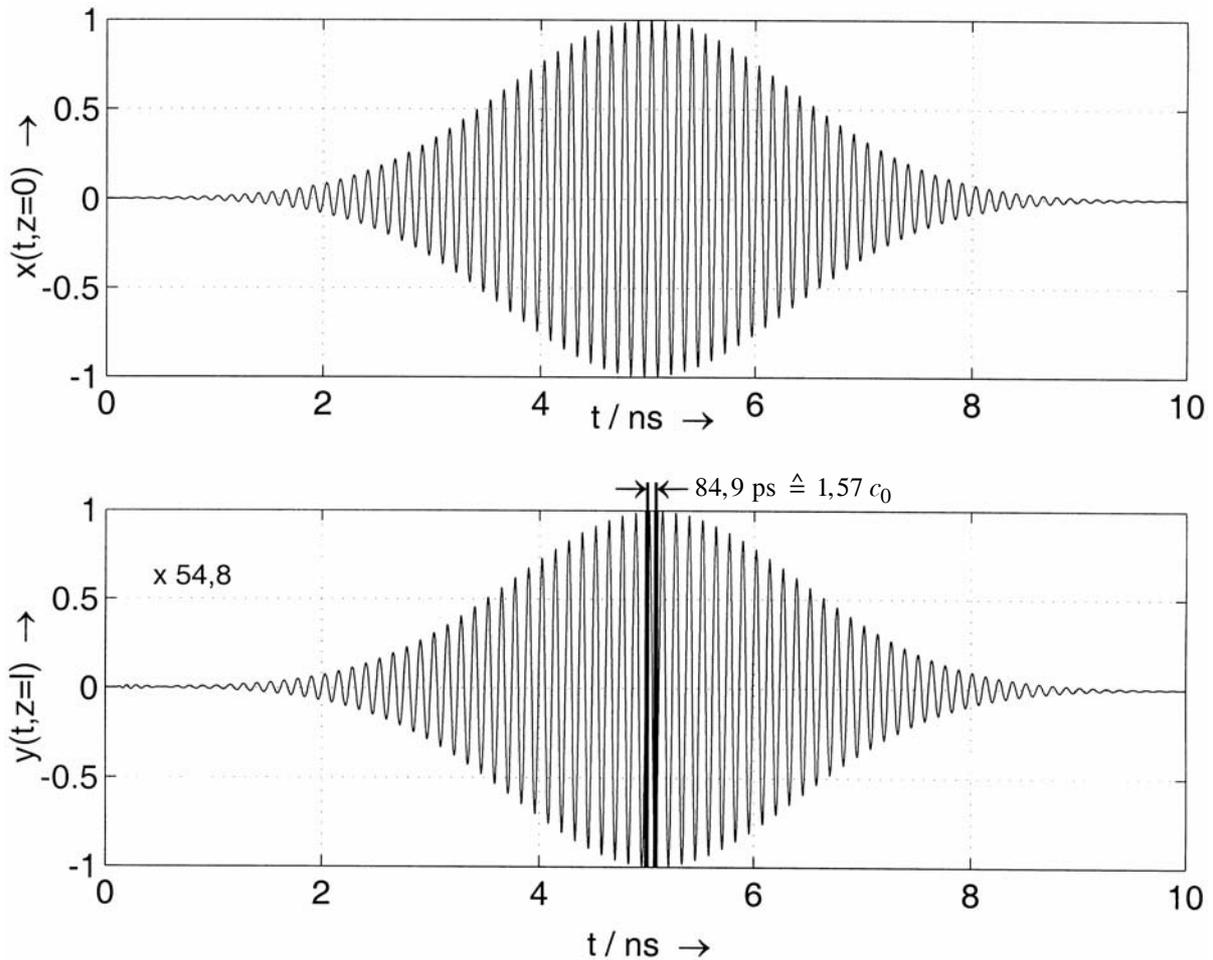


Bild 6: HF-Träger der Frequenz $f = 8$ GHz mit gaußförmiger Einhüllender als Eingangszeitsignal $x(t, z=0)$ und vergrößerter Zeitverlauf der transmittierten H_{10} -Welle $y(t, z=l)$ für einen Tunnel der Länge $l = 4$ cm und den Abmessungen $a_1 = 22,860$ mm, $a_2 = 15,799$ mm und $b = 10,160$ mm.

Eine Momentaufnahme des eingeschwungenen Zustands der räumlichen Verteilung des vertikalen elektrischen Feldes, das aus der Superposition aller H_{m0} -Wellen entsprechend (28) berechnet wurde, ist in **Bild 7** dargestellt. Man sieht den Einfluss der Reflexion am Tunnelseingang und das Eindringen in den evaneszenten Bereich. Die transmittierte Welle im rechten Raumteil, die um fast 35 dB gegenüber der einfallenden Welle gedämpft ist, ist kaum noch zu erkennen.

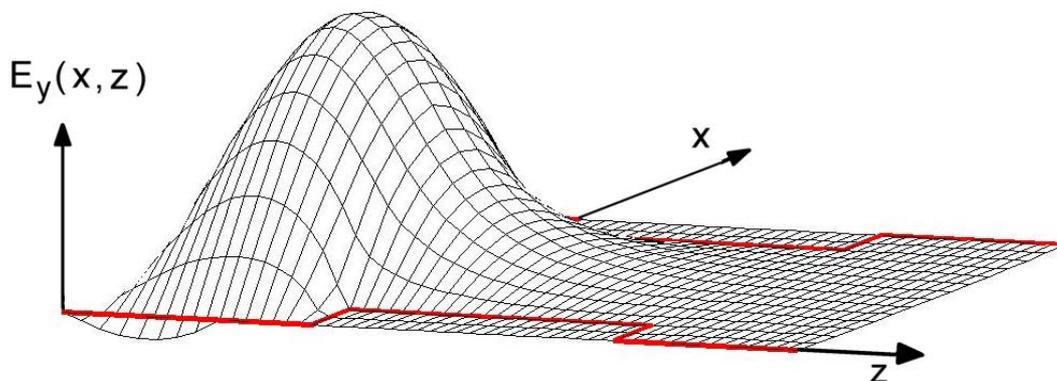


Bild 7: Räumliche Verteilung des elektrischen Feldes im eingeschwungenen Zustand bei sinusförmiger Anregung mit $f = 8$ GHz für einen Tunnel der Länge $l = 4$ cm und den Abmessungen $a_1 = 22,860$ mm, $a_2 = 15,799$ mm und $b = 10,160$ mm.

Die gegenseitige Verschiebung der Energieschwerpunkte in **Bild 6** lässt sich nach [6] wie folgt berechnen:

$$t_e = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t y^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt} - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t x^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt} . \quad (29)$$

Mit den Daten aus **Bild 6** können die Integrale numerisch berechnet werden. Daraus folgt $t_e = 84,9$ ps in Übereinstimmung mit der Laufzeit des Impulsmaximums, was bei einer Tunnellänge von 4 cm einer Geschwindigkeit von $1,57 c_0$ entspricht. Obwohl sich das Impulsmaximum im Tunnel schneller als das Licht bewegt hat, bleibt die Signalübertragung kausal. Die reinen Messergebnisse aus [9, 10] können somit aufgrund der Maxwell'schen Theorie verifiziert werden, jedoch darf man daraus nicht auf einen instantanen Energietransport schließen. Eine superluminale Gruppengeschwindigkeit ist nämlich nicht dazu geeignet, Signale (d.h. Energie) mit Überlichtgeschwindigkeit zu übermitteln [3, 19]. Die Bewegung einer festen Energiemenge erfolgt nämlich stets mit der Energiegeschwindigkeit $v_E \leq c_0$. Im Sinne der Kausalität ist die erste ankommende Wellenfront am Ausgang eines Tunnels der Länge $l = 4$ cm gegenüber dem Beginn des Eingangssignals natürlich um eine der Frontgeschwindigkeit entsprechende Laufzeit von $t_F = l/v_F = l/c_0 = 130$ ps verzögert, was wegen der anfänglichen Kleinheit der Signale in **Bild 6** allerdings kaum erkennbar ist.

Neben einer evaneszenten Hohlleiterverengung nur in der H-Ebene, wurden auch evaneszente Verengungen in H- und E-Ebene betrachtet. Die berechneten Daten zeigen qualitativ gleiches Verhalten beider Tunnelhohlleiter.

4 Zusammenfassung

Die Übertragung von Informationen ist stets an den Transport einer messbaren Energiemenge gebunden. Ein in seiner Empfindlichkeit gesteigerter Empfänger kann ein ankommendes Signal daher zeitlich früher detektieren, jedoch nicht bevor die allererste Wellenfront überhaupt eingetroffen ist. Die Frontgeschwindigkeit eines jeden Signals ist immer gleich der Vakuumlichtgeschwindigkeit. Die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit jedoch, können durchaus größere Werte als die Vakuumlichtgeschwindigkeit einnehmen oder sogar negativ werden. In diesen Fällen verlieren diese Geschwindigkeitsdefinitionen ihren Sinn und verleiten zu falschen Schlussfolgerungen, denn niemals erscheint die Wirkung vor der Ursache. Scheinbare Verletzungen der Kausalität erweisen sich regelmäßig als Missinterpretationen der Daten aufgrund unzulässiger Auslegung des Geschwindigkeitsbegriffs.

5 Literaturangaben

- [1] Born, M.; Wolf, E.: Principles of Optics. Cambridge: University Press, 1997.
- [2] Brillouin, L. Wave propagation and group velocity. New York: Academic Press, 1960.
- [3] Chiao, R. Y.; Kwiat, P. G.; Steinberg, A. M.: Schneller als das Licht? Spektrum der Wissenschaft (1993), S. 40-49.
- [4] Emig, T.: Deutung der Tunnelzeiten bei evaneszenten elektromagnetischen Moden im Rahmen der klassischen Elektrodynamik. Diplomarbeit, Universität Köln, 1995.
- [5] Jäger, H. R.: Analyse der Ausbreitung von Impulsen in Mikrowellenschaltungen. Diplomarbeit, FH Ravensburg-Weingarten, 1998.
- [6] Kark, K. W.: Wie schnell ist schnell? Geschwindigkeitsdefinitionen bei der Übertragung von Signalen. Frequenz 53 (1999), eingereicht.
- [7] Marko, H.: Korrelation und Vorausbestimmung von Signalen. VDE Fachberichte 19 (1956).
- [8] Morgenstern, G.: Gruppenlaufzeit und Impulslaufzeit. Arch. elektr. Übertr. 25 (1971), S. 393-395.
- [9] Nimtz, G.: Instantanes Tunneln – Tunnelexperimente mit elektromagnetischen Wellen. Phys. Bl. 49 (1993), S. 1119-1120.
- [10] Nimtz, G.: Schneller als das Licht? Physik in unserer Zeit 28 (1997), S. 214-218.
- [11] Piefke, G.: Die Anwendung der Entwicklung nach Eigenfunktionen auf Beugungsprobleme in endlichen Gebieten. Arch. elektr. Übertr. 22 (1968), S. 275-281.
- [12] Piefke, G.: Feldtheorie, Band III. Mannheim: Bibliographisches Institut, 1977.
- [13] Rupprecht, W.: Lineare Netzwerke mit negativer Gruppenlaufzeit. Dissertation, Technische Hochschule Karlsruhe, 1961.
- [14] Sommerfeld, A.: Vorlesungen über Theoretische Physik, Band II: Mechanik der deformierbaren Medien. Thun: Harri Deutsch, 1992.
- [15] Sommerfeld, A.: Vorlesungen über Theoretische Physik, Band IV: Optik. Thun: Harri Deutsch, 1978.
- [16] Sommerfeld, A.; Brillouin, L.: Über die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien. Annalen der Physik 44 (1914), S. 177-240.
- [17] Steinbuch, K.; Rupprecht, W.: Nachrichtentechnik, Band II: Nachrichtenübertragung. Mannheim: Springer, 1982.
- [18] Stratton, J. A.: Electromagnetic Theory. New York: McGraw-Hill, 1941.
- [19] Thoma, P.; Weiland, T.: Wie real ist das Instantane Tunneln? Phys. Bl. 50 (1994), S. 313, 360, 361.