

# Wie schnell ist schnell? Geschwindigkeitsdefinitionen bei der Übertragung von Signalen

## How Fast is Fast? Definition of Velocities for the Transmission of Signals

### Übersicht

Zur Beschreibung der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen in dispersiven Medien sind verschiedene Definitionen möglich, wobei nur die der Energiegeschwindigkeit stets zu einer relativistisch verträglichen, kausalen Systembeschreibung führt. Der Vergleich einzelner Geschwindigkeitsmodelle erfolgt an Schaltungen aus konzentrierten Bauelementen mit negativer Gruppenlaufzeit und an Hohlleitern mit cutoff-Bereichen, in denen die Gruppengeschwindigkeit beliebig hohe Werte annehmen kann. Trotzdem bleibt in allen Fällen die Signalübertragung kausal und niemals bewegt sich Energie schneller als das Licht.

Von Klaus W. Kark

Mitteilung aus dem  
Institut für Nachrichtentechnik  
der Fachhochschule  
Ravensburg-Weingarten

Herrn Prof. Dr.-Ing.  
Gerhard Piefke  
zum 80. Geburtstag  
gewidmet

### Abstract

Various definitions can be used to describe the velocity of signals propagating in dispersive media, but only the velocity of energy transport does never violate the postulates of special relativity for causal systems. We discuss electric networks with negative group delay and hollow waveguides with cutoff regions having unbounded group velocities. Nevertheless the transmission of signals is always causal and energy does never travel faster than light.

### Für die Dokumentation

Phasengeschwindigkeit / Gruppengeschwindigkeit / Frontgeschwindigkeit / Energiegeschwindigkeit / Quantilgeschwindigkeit / Signalgeschwindigkeit / Kausalität / Tunneleffekt

## 1. Einleitung

Mangelhafte Unterscheidung zwischen Phasen-, Gruppen-, Front- und Energiegeschwindigkeit ( $v_p$ ,  $v_g$ ,  $v_F$ ,  $v_E$ ) hat bis in die jüngste Vergangenheit immer wieder zu Fehlern in der physikalischen Interpretation geführt. In der Maxwell'schen Elektrodynamik können nämlich sowohl die Phasen- als auch die Gruppengeschwindigkeit die Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c_0$  überschreiten. Besonders beim klassischen Effekt der Durchtunnelung von evaneszenten Hohlleiterabschnitten (**Bild 1**), wo die Gruppengeschwindigkeit beliebig hohe Werte (sogar unendlich) annehmen kann [15], muß bei der Erklärung der Effekte sehr sorgfältig vorgegangen werden. Es soll hier versucht werden, scheinbare Paradoxa von Überlichtgeschwindigkeiten aufzulösen. Zunächst wird dazu der Dispersionsbegriff erläutert und verschiedene Geschwindigkeitsdefinitionen diskutiert. Da manche Begriffe heutzutage oft unpräzise oder gar falsch angewendet werden, sollen zunächst einige wesentliche Ergebnisse aus der Literatur zusammengefaßt werden. Danach wird die Signalübertragung in elektrischen Schaltungen aus konzentrierten Bauelementen und der Tunneleffekt in Hohlleitern mit cutoff-Bereichen behandelt. Bei den untersuchten Anordnungen kann zwar  $v_g > c_0$  oder auch  $v_g < 0$  werden, doch breitet sich ein Signal, d. h. seine Energie, niemals schneller als das Licht aus und jede Signalübertragung ist daher stets kausal.

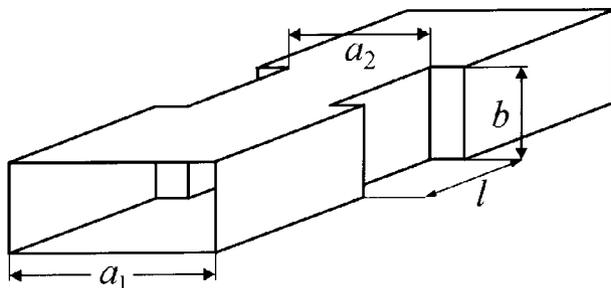


Bild 1: Tunneleffekt bei einer Hohlleiterverengung in der H-Ebene. Ein im allgemeinen geringer Energieanteil kann die cutoff-Barriere überwinden.

## 2. Geschwindigkeitsdefinitionen – Unterschiede und Gemeinsamkeiten

Wenn die Phasenkonstante  $\beta(\omega)$  nichtlinear von der Frequenz  $\omega$  abhängt, dann spricht man von einem dispersiven Medium. Bei Vorliegen von Dispersion wird die Geschwindigkeit der Wellenausbreitung frequenzabhängig, was bei der Übertragung breitbandiger Signale zu linearen Verzerrungen führt. In einem idealen Medium ohne Dispersion, d.h. im Vakuum, werden alle im folgenden definierten Geschwindigkeiten gleich  $c_0$ .

### 2.1 Phasengeschwindigkeit

Das Konzept der Phasengeschwindigkeit [2]

$$v_p(\omega) = \frac{\omega}{\beta(\omega)} \quad (1)$$

setzt eine monochromatische Welle von unendlicher Dauer und Ausdehnung voraus. Die Phasengeschwindigkeit beschreibt dann die Geschwindigkeit, mit der sich ein Zustand konstanter Phase im Raum ausbreitet. Eine solche Welle ist nur angenähert realisierbar und im Sinne der Informationstheorie auch völlig wertlos, da ihr der unvorhersehbare, statistische Charakter einer Nachricht fehlt.

### 2.2 Gruppengeschwindigkeit

Einem Wellenzug endlicher Länge, d.h. einem Information tragenden Signal, wird durch die Fourier-Transformation stets ein kontinuierliches Spektrum zugeordnet, das sich i.a. aus einer Superposition aller Frequenzen  $-\infty < \omega < \infty$  zusammensetzt [19]. In einem dispersiven Medium bewegt sich jede dieser Harmonischen mit der ihr eigenen Phasengeschwindigkeit. Für den Impuls als Ganzes verliert daher der Begriff der Phasengeschwindigkeit seine Bedeutung und wurde bei schmalbandigen Signalen durch die Gruppengeschwindigkeit [24]

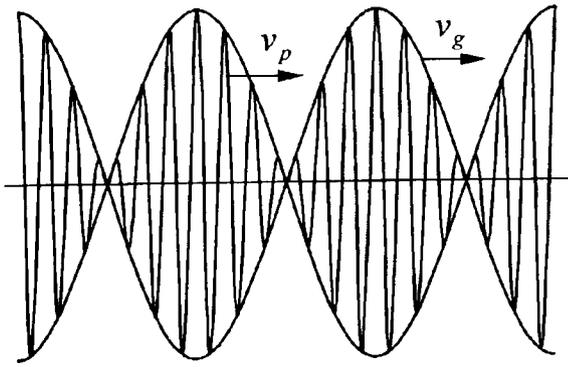


Bild 2: Schwebung zweier monochromatischer Wellenzüge dicht benachbarter Frequenz. Die Einhüllende der Wellenpakete bewegt sich mit Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  und ein beliebiger Punkt des oszillierenden Signals mit Phasengeschwindigkeit  $v_p$ .

$$v_g(\omega) = \frac{1}{d\beta(\omega)/d\omega} \quad (2)$$

ersetzt, die man sich anschaulich als Schwerpunktgeschwindigkeit des Wellenzuges vorstellen kann und bei geringer Dispersion mit der Geschwindigkeit der Einhüllenden übereinstimmt (Bild 2). Während der Ausbreitung verbreitert sich allerdings der Impuls und fließt allmählich auseinander. Bei starker Dispersion unterliegt die ursprünglich lokalisierte Wellengruppe daher einer baldigen Verschmierung, so daß dann auch die Gruppengeschwindigkeit ihren Sinn verliert. Durch Einsetzen von  $\beta(\omega) = \omega/v_p(\omega)$  in (2) und nach Differentiation kann man folgenden Zusammenhang herleiten [18]:

$$v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p} \frac{dv_p}{d\omega}} \quad (3)$$

Wenn die Phasengeschwindigkeit linear von der Frequenz abhängt, d. h. für  $v_p \propto \omega$ , muß daher nach (3) die Gruppengeschwindigkeit den Wert unendlich annehmen. Bei überproportionalem Anstieg von  $v_p$  mit der Frequenz wird sogar  $v_g < 0$ . Es gibt eine Vielzahl praktischer Anordnungen, in denen dieses Verhalten beobachtet wird [28]. Im allgemeinen unterscheidet man folgende Spezialfälle:

- keine Dispersion:  $v_g = v_p = c$
- normale Dispersion:  $v_g(\omega) < c < v_p(\omega)$
- anomale Dispersion:  $v_p(\omega) < c < v_g(\omega)$ .

### 2.3 Gruppenlaufzeit und Phasenlaufzeit

Im Gegensatz zur Gruppengeschwindigkeit ist der Begriff der Gruppenlaufzeit auch zur Beschreibung elektrischer Schaltungen aus konzentrierten Bauelementen, die keine räumliche Ausdehnung haben, sinnvoll [27]. Ist nämlich für ein System seine komplexe Übertragungsfunktion als Fourier-Transformierte der Impulsantwort

$$\underline{H}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{h}(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4)$$

gegeben, so definiert man [14] die Gruppenlaufzeit einer schmalbandigen Frequenzgruppe als

$$t_g(\omega) = -\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega} = -\text{Im} \left\{ \frac{1}{\underline{H}(\omega)} \frac{d\underline{H}(\omega)}{d\omega} \right\} \quad (5)$$

Bei der Ausbreitung in einem homogenen Medium der Länge  $l$  gilt natürlich  $v_g(\omega) = l/t_g(\omega)$ . Analog zu (5) kann man für eine monofrequente Sinusschwingung auch eine Phasenlaufzeit definieren:

$$t_p(\omega) = -\frac{\Phi(\omega)}{\omega} = \frac{l}{v_p(\omega)} \quad (6)$$

Sowohl Gruppen- als auch Phasenlaufzeit können durchaus negative Werte annehmen, ohne jedoch zu einer akasualen Signalübertragung zu führen. In solchen Fällen muß man die Geschwindigkeit der Übertragung auf andere Weise definieren. Stets folgt die Wirkung der Ursache und nicht umgekehrt.

### 2.4 Schwerpunktlaufzeit, Impulslaufzeit und Laufzeit des Energieschwerpunkts

Die Antwort eines Systems bei Anregung mit einem Diracstoß  $\delta(t)$  zur Zeit  $t = 0$  wird als Impulsantwort  $h(t)$  bezeichnet. Bei kausalen Systemen gilt  $h(t) = 0$ , wenn  $t < 0$  ist. Betrachtet man den Schwerpunkt der Impulsantwort, so ist er gegenüber dem Eingangssignal  $\delta(t)$  um die Gruppenlaufzeit bei der Frequenz Null verzögert [13, 21]:

$$t_s = \frac{\int_0^{\infty} t h(t) dt}{\int_0^{\infty} h(t) dt} = t_g(\omega = 0) \geq 0 \quad (7)$$

Die Schwerpunktlaufzeit stellt aufgrund ihrer Definition eine mittlere Verzögerungszeit dar. Der eigentliche Beginn der Impulsantwort liegt daher früher, während sich das Ende der Impulsantwort erst nach Ablauf von  $t_s$  einstellen kann [8]. Als weitere Kenngröße wurde in [14] die Impulslaufzeit

$$t_i = \frac{\int_0^{\infty} t h^2(t) dt}{\int_0^{\infty} h^2(t) dt} = \frac{\int_0^{\infty} t_g(\omega) |\underline{H}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |\underline{H}(\omega)|^2 d\omega} \geq 0 \quad (8)$$

für die Bewegung des Schwerpunkts der Energie der Impulsantwort definiert, die man alternativ im Zeitbereich oder auch im Frequenzbereich berechnen kann. Die mittlere Laufzeit der Impulsenergie ist daher gleich der spektral gemittelten Gruppenlaufzeit. Eine Anwendung von (8) setzt die Existenz der Integrale voraus, d. h. weder  $h(t)$  noch  $\underline{H}(\omega)$  dürfen Diracstöße enthalten. Wird deswegen anstelle  $\delta(t)$  ein realisierbares Signal  $s_1(t)$  mit endlicher Energie, ein sogenanntes Energiesignal, als Systemanregung benutzt und die Systemantwort  $s_2(t) = s_1(t) * h(t)$  durch Faltung mit der Impulsantwort berechnet, dann kann (8) ohne Konvergenzprobleme verallgemeinert werden. Die gegenseitige Verschiebung der Energieschwerpunkte beider Signale läßt sich nämlich durch eine Laufzeit

$$t_e = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t s_2^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s_2^2(t) dt} - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t s_1^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t) dt} \quad (9)$$

ausdrücken. Wegen der Differenzbildung kann  $t_e < 0$  werden und zwar dann, wenn das Eingangsspektrum in einem Bereich negativer Gruppenlaufzeit liegt. Gruppen-, Phasen-, Schwerpunkt- und Impulslaufzeit sind eine reine Netzwerkeigenschaft, während die Laufzeit des Energieschwerpunkts  $t_e$  zusätzlich noch von der Art des Eingangssignals abhängt.

### 2.5 Front- und Signalgeschwindigkeit

Nach Einsteins Veröffentlichung seiner speziellen Relativitätstheorie [6] glaubte man zunächst, daß die Gruppengeschwindigkeit mit der Energiegeschwindigkeit identisch sei. Offensichtlich größere Werte als  $c_0$  wurden dann auch schnell als vermeintliche Argumente gegen das Verbot von Überlichtgeschwindigkeiten beim Energietransport angesehen. Erst durch die Arbeiten von Sommerfeld und Brillouin [26] konnten die scheinbaren Widersprüche aufgeklärt werden. Die wichtigsten Erkenntnisse werden im folgenden kurz zusammengefaßt. In keinem Fall werden dabei die Forderungen der Kausalität und der speziellen Relativitätstheorie verletzt.

Nach plötzlichem Einschalten eines Generators wird sich die erste Wellenfront als Diskontinuität mit der für  $\omega \rightarrow \infty$  gültigen Phasengeschwindigkeit ausbreiten. Diese prinzipiell nicht überschreitbare Geschwindigkeit wird auch Frontgeschwindigkeit  $v_F$  genannt:

$$v_F = \lim_{\omega \rightarrow \infty} v_p(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega}{\beta(\omega)} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} c(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c_0. \quad (10)$$

In der Maxwell'schen Elektrodynamik und in allen anderen sinnvollen Feldtheorien gilt stets  $v_F = c_0$ , weil bei genügend schneller Änderung der Felder die Polarisationsprozesse in materiellen Körpern diesen Änderungen aufgrund der Trägheit der Ladungsträger nicht mehr folgen können [12]. Die Front eines Signals pflanzt sich also unter allen Umständen mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c_0$  fort, da für unendliche Frequenzen (d.h. unendliche Photonenenergien  $E = \hbar\omega$ ) alle Einflüsse des Mediums auf die Wellenausbreitung vernachlässigbar sind [23]. Die ersten ankommenden Schwingungen werden erste oder Sommerfeld'sche Vorläufer genannt [25]. Sie sind sehr schwach und stark oszillierend. Mit der kleineren Geschwindigkeit  $c = c_0/\sqrt{\mu_r\epsilon_r}$  innerhalb eines materiellen Körpers treffen später die zweiten oder Brillouin'schen Vorläufer ein, die eine etwas größere Amplitude und wesentlich längere Schwingungsdauer besitzen [26]. Beide Vorläufer können sich - abhängig von der im Medium zurückgelegten Strecke - zum Teil überlagern. Ihre Amplitude ist im allgemeinen sehr klein, wächst aber sehr schnell an, wenn ihre Momentanfrequenz sich der des Signals annähert. Dieser Hauptteil der Energie erreicht den Empfänger mit einer Geschwindigkeit, die nach [3] Signalgeschwindigkeit genannt wird. Eine mathematische Definition der Signalgeschwindigkeit war zunächst nicht eindeutig zu geben, obwohl ihre physikalische Bedeutung offensichtlich war. Der typische dreiteilige Verlauf eines ankommenden Wellenzugs ist für den Fall der Ausbreitung in einem dispersiven Medium mit nur einer Resonanzabsorption, die oberhalb des wesentlichen Frequenzbereichs des Signals liegt, schematisch in **Bild 3** dargestellt (nach [26]).

### 2.6 Energiegeschwindigkeit

Stratton führte in [28] schließlich die Energiegeschwindigkeit  $v_E$  ein, die gerade den Beginn des Hauptsignals nach den beiden Vorläufern markiert (**Bild 3**). Sie gibt die Geschwindigkeit eines Energiepakets  $E = \hbar\omega$  mit harmonischer Zeitabhängigkeit der Frequenz  $\omega$  als Quotient aus dem reellen Poyntingschen Vektor  $\vec{S}_R$  der Wirkleistungsdichte in  $W/m^2$  und der räumlichen Gesamtenergie-

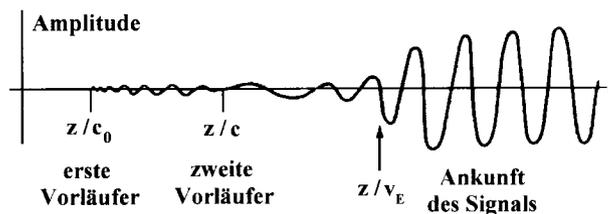


Bild 3: Typischer Zeitverlauf eines ankommenden Wellenzugs nach Ausbreitung in einem dispersiven Medium der Länge  $z$ . Dabei ist  $c_0$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit,  $c = c_0/\sqrt{\mu_r\epsilon_r}$  ist die reduzierte Lichtgeschwindigkeit und  $v_E$  die Energiegeschwindigkeit, mit der die Ankunft des Hauptteils der Energie markiert wird.

dichte  $w = w_e + w_m$  in  $Ws/m^3$  an und ist stets verträglich mit den Forderungen der speziellen Relativitätstheorie:

$$\vec{v}_E(\omega) = \frac{\vec{S}_R}{w} = \frac{\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\}}{\frac{\epsilon}{4} \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{\mu}{4} \vec{H} \cdot \vec{H}^*}. \quad (11)$$

Man kann allgemein zeigen [7], daß für alle Frequenzkomponenten stets  $v_E(\omega) \leq c(\omega) \leq c_0$  gilt. Kein Signal, d.h. keine Energie und keine Information, kann daher schneller als mit Lichtgeschwindigkeit übertragen werden. Zusätzlich zur lokalen Wandergeschwindigkeit eines infinitesimalen Energiepakets kann man eine innerhalb der Phasenfront räumlich gemittelte Energiegeschwindigkeit definieren [22, 18]:

$$\langle v_E(\omega) \rangle = \frac{\iint_F \vec{S}_R \cdot d\vec{F}}{\iint_F w dF} = \frac{P}{W'} \leq c(\omega) \leq c_0. \quad (12)$$

Sie beschreibt den globalen Energietransport der ganzen Welle und ist ebenfalls niemals größer als die Lichtgeschwindigkeit. Dabei ist  $P$  die durch eine Querschnittsfläche  $F$  fließende Wirkleistung und  $W'$  die je Längeneinheit im Querschnitt gespeicherte elektromagnetische Energie. Bei einer homogenen TEM-Welle gilt natürlich  $\langle v_E(\omega) \rangle = v_E(\omega)$ , während bei Hohlleiterwellen die differentielle Querschnittsverteilung der Energieströmung von ihrem räumlichen Mittelwert durchaus abweicht. Nur bei Vorliegen von normaler Dispersion stimmt die integrale Definition der Energiegeschwindigkeit (12) mit der Gruppengeschwindigkeit (2) überein [1], sonst ergeben sich verschiedene Werte.

### 2.7 Quantilgeschwindigkeit

Aufgrund der prinzipiell begrenzten Empfindlichkeit eines jeden Detektors kann die Ankunft eines Signals im Experiment nicht eindeutig bestimmt werden. Mit einer theoretisch denkbaren beliebig empfindlichen Meßeinrichtung könnte sogar der exakte Beginn der ersten Vorläufer, also die echte Wellenfront, erkannt werden. Damit würde man eine Signalgeschwindigkeit von  $c_0$  messen, unabhängig von dem speziellen Medium [9]. In [5] wurde deshalb die Definition einer Quantilgeschwindigkeit vorgeschlagen. Die Ankunft eines Signals an einer Stelle  $z_Q$  wird dann festgestellt, wenn die dort im Detektor akkumulierte Energie einem bestimmten Bruchteil  $0 < Q < 1$  der gesamten einlaufenden elektromagnetischen Energie  $W$  entspricht:

$$\int_{z_Q(t)}^{\infty} W'(t, z) dz = QW. \quad (13)$$

Dabei ist  $W'$  die je Längeneinheit in  $z$ -Richtung gespeicherte elektrische und magnetische Energie. Die so bestimmte Quantilposition  $z_Q$  wandert mit der für die entsprechende Empfindlichkeit  $Q$  des Detektors sich einstellenden Quantilgeschwindigkeit  $v_Q(t) = dz_Q(t)/dt$  in die positive  $z$ -Richtung. Die Quantilgeschwindigkeit beschreibt den Transport einer festen Menge von Energie und ist daher eine Energiegeschwindigkeit. In [5] wird dann auch folgender Zusammenhang gezeigt:

$$\bar{v}_Q(t) = \frac{\bar{S}(t, z_Q(t))}{w(t, z_Q(t))} \quad (14)$$

### 2.8 Kausalität

Die Definition der Quantilgeschwindigkeit führt, ebenso wie diejenige der Energiegeschwindigkeit, stets zu einer kausalen Signalübertragung mit  $v_Q(t) \leq c_0$ . Für die Übertragung von Signalen sind nur die Front-, die Quantil- und die Energiegeschwindigkeit maßgebend. Andere Geschwindigkeitsdefinitionen versagen zuweilen und können dann zu falschen Schlußfolgerungen führen. So ist die Phasengeschwindigkeit für die Signalübertragung bedeutungslos, da der zugrundeliegende monochromatische Wellenzug unendlich lange andauert und unmoduliert ist, also überhaupt keine Information trägt. Auch die Gruppengeschwindigkeit ist für die Übertragung von Signalen nur insofern relevant, solange sie mit der Energiegeschwindigkeit übereinstimmt, d. h. bei Vorliegen von normaler Dispersion.

### 3. Beispiele

Im folgenden werden drei Anordnungen behandelt, bei denen die Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  negativ oder auch größer als die Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c_0$  werden kann. Es kann stets eine einfache Erklärung für dieses Verhalten gefunden werden. In jedem Fall bleibt die Signalübertragung kausal und niemals wird Energie schneller als mit  $c_0$  übertragen.

#### 3.1 Netzwerke mit negativen Gruppenlaufzeiten

Aus [21] geht hervor, daß in Netzwerken mit positiven Schaltelementen ( $R, L, C$ ) eine negative Gruppenlaufzeit nur in Teilbereichen der Frequenz möglich ist und zwar dort, wo die Übertragungsfunktion  $H(\omega)$  eine starke Dämpfung aufweist. Zur Realisierung solcher Schaltungen bieten sich Mindestphasensysteme an, deren Übertragungsfunktion keine Nullstellen in der rechten komplexen Halbebene besitzt. Solche Mindestphasensysteme können z. B. durch die Kettenschaltung von Parallel- und Serienschwingkreisen synthetisiert werden (Bild 4). Als Sonderfall resultiert daraus eine einstufige Bandsperre mit  $Z_0 = 75 \Omega$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 1 \mu\text{H}$  und  $C = 1 \text{ nF}$ , die sich an ein Beispiel aus [8] anlehnt (Bild 5).

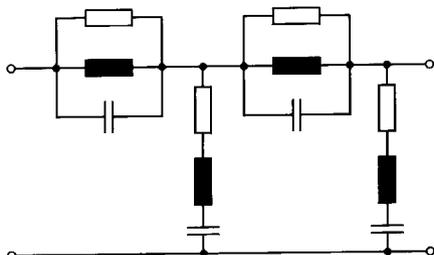


Bild 4: Mindestphasensystem realisiert durch die Kettenschaltung von Schwingkreisen. Die Übertragungsfunktion weist dort Pole auf, wo in den Längszweigen die Impedanzen unendlich bzw. in den Querzweigen null werden.

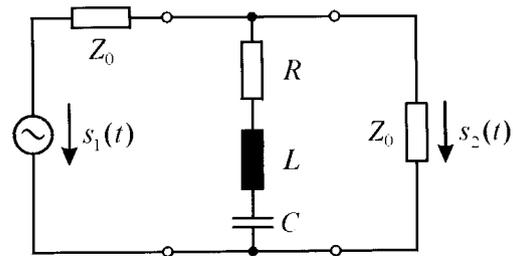


Bild 5: Einstufige Bandsperre mit in Teilbereichen der Frequenz negativer Gruppenlaufzeit.

Man erhält mit  $p = j\omega$  die komplexe Spannungsübertragungsfunktion

$$\underline{H}(p) = \frac{\underline{S}_2(p)}{\underline{S}_1(p)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{R + Z_0/2}{L}p + \frac{1}{LC}} \quad (15)$$

Die Gruppenlaufzeit  $t_g(\omega)$  dieser Schaltung, die man nach (5) berechnen kann, wird im Frequenzbereich  $3,590 \text{ MHz} \leq f \leq 7,057 \text{ MHz}$  negativ (Bild 6). Als Eingangsspannung  $s_1(t)$  wurde daher ein mit  $f_0 = 5 \text{ MHz}$  modulierter, symmetrischer Gaußimpuls gewählt, dessen Einhüllende eine zweiseitige 60-dB-Breite von  $2,5 \mu\text{s}$  besitzt. Außerhalb dieser Zeitspanne wird der Impuls näherungsweise zu Null gesetzt. Mit einer schnellen Fourier-Transformation (FFT) wurde dann die Ausgangsspannung  $s_2(t)$  berechnet, die für  $t < 0$  verschwindet und für  $t \rightarrow \infty$  asymptotisch auf Null abklingt (Bild 7). Der Energieschwerpunkt des Ausgangssignals liegt weiter links als der Energieschwerpunkt des Eingangssignals, ist also zu früheren Zeiten hin verschoben. Seine Laufzeit nach der Definition (9) ist mit  $t_c = -0,129 \mu\text{s}$  daher negativ. Trotzdem wird natürlich die zeitliche Folge von Ursache und Wirkung eingehalten. Die Signalübertragung bleibt kausal, da auch hier die Front des Ausgangssignals der Front der Anregung stets nachfolgt. Die Bewegung des Energieschwerpunkts stimmt im allgemeinen nicht mit der Bewegung des Impulsmaximums überein, da Impulse während ihrer Ausbreitung eine Tendenz zu unsymmetrischer Verformung aufweisen.

Eine kausale Erklärung negativer Gruppenlaufzeiten findet man bereits in [21, 27, 14, 30]. Die erste Wirkung erscheint keineswegs vor der Ursache. Es tritt lediglich der Schwerpunkt der Signalenergie am Ausgang um  $|t_c|$  früher auf als am Eingang. Dabei hat sich aber keineswegs Energie mit negativer Geschwindigkeit fortbewegt. Vielmehr verändert sich nur die Form der Impulsenhüllen-

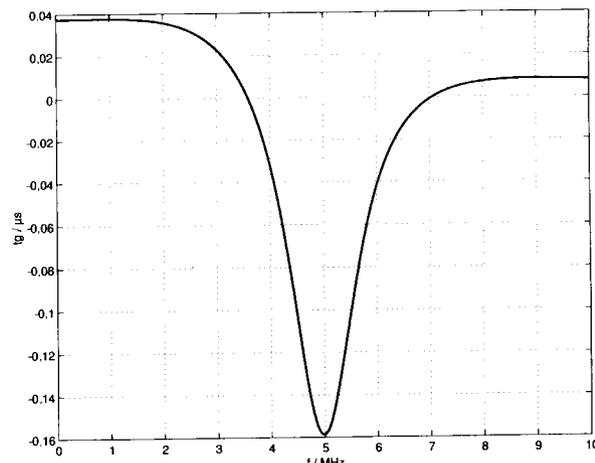


Bild 6: Frequenzabhängige Gruppenlaufzeit  $t_g$  der Bandsperre aus Bild 5 mit  $Z_0 = 75 \Omega$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 1 \mu\text{H}$  und  $C = 1 \text{ nF}$ . Im Bereich  $3,590 \text{ MHz} \leq f \leq 7,057 \text{ MHz}$  ergeben sich negative Werte.

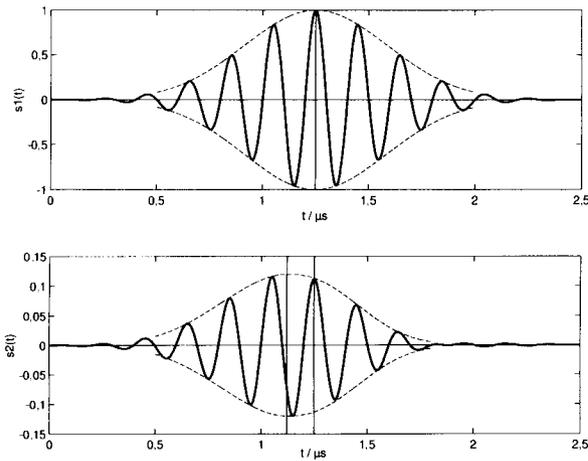


Bild 7: Modulierter Gaußimpuls als Generatorspannung  $s_1(t)$  und Ausgangsspannung  $s_2(t)$  der Bandsperre aus Bild 5. Der Energieschwerpunkt von  $s_2(t)$  ist um  $0,129 \mu\text{s}$  gegenüber dem Energieschwerpunkt von  $s_1(t)$  zu früheren Zeiten hin verschoben.

den so, daß sich ein neuer, zeitlich früherer Scheitelpunkt bildet [4]. Die Laufzeit des Energieschwerpunkts  $t_c$  darf daher nicht immer als Verzögerungszeit interpretiert werden. In Frequenzbereichen nämlich, in denen der Amplitudengang  $|H(\omega)|$  nicht konstant ist, können  $t_g$  und  $t_c$  durchaus negativ werden. Sie dürfen dann nicht mehr als Laufzeit im Sinne einer Signalverzögerung, sondern allenfalls als Maß für lineare Verzerrungen interpretiert werden [8], die nämlich gerade dann besonders stark sind. Die Laufzeit des Energieschwerpunkts  $t_c$  eines schmalbandigen Signals stimmt nur dann mit der stets positiven Signallaufzeit überein, wenn das Signalspektrum in einen Bereich annähernd konstanter positiver Gruppenlaufzeit fällt [21].

### 3.2 Hohlleiter mit unterbrochenem Stoffeinsatz

Ein Rechteckhohlleiter werde mit einem verlustlosen Dielektrikum der Permittivität  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  gefüllt, das auf eine Strecke der Länge  $l$  unterbrochen sei (Bild 8). Die harmonische Anregung ( $e^{j\omega t}$ ) des Wellenleiters erfolge aus dem Raumteil ① durch eine  $H_{mn}$ -Welle. Durch Reflexionen an den senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehenden Trennflächen bei  $z = 0$  und  $z = l$  werden nur Eigenwellen vom selben Typ wie die einfallende Welle angeregt. Die Generatorfrequenz sei so hoch, daß wir in den Raumteilen ① und ③, die gleiche Materialkonstanten aufweisen, von einer ausbreitungsfähigen  $H_{mn}$ -Welle ausgehen können. Im Raumteil ②, der keine Füllung enthält, ist die Wellenlänge dagegen größer. Die dort vorhandenen hin- und rücklaufenden Wellen können daher durchaus auch zu den nicht ausbreitungsfähigen Dämpfungstypen gehören. Für die Ausbreitungsconstanten der drei Raumteile gilt daher

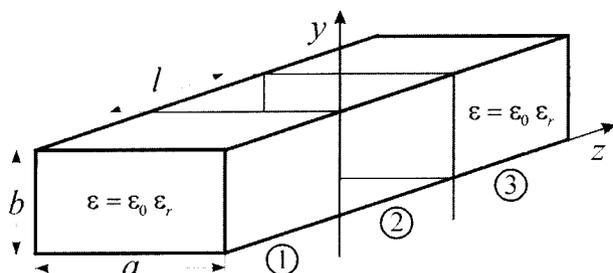


Bild 8: Hohlleiter mit unterbrochenem Stoffeinsatz nach [7]. Bei geeigneter Frequenzwahl kann eine  $H_{mn}$ -Welle in den Raumteilen ① und ③ ausbreitungsfähig und in ② cutoff sein.

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_1 = \underline{\gamma}_3 = j\beta_1 = j\sqrt{\epsilon_r \omega^2 - \omega_c^2} / c_0 & \quad \text{für } \omega \geq \omega_c / \sqrt{\epsilon_r} \\ \underline{\gamma}_2 = \begin{cases} \alpha_2 = \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2} / c_0 & \text{für } \omega \leq \omega_c \\ j\beta_2 = j\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} / c_0 & \text{für } \omega \geq \omega_c \end{cases} & \quad (16) \end{aligned}$$

mit der Grenzkreisfrequenz einer  $H_{mn}$ -Welle des ungefüllten Raumteils ②

$$\omega_c = c_0 \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2} \quad (17)$$

Unter Erfüllung der Stetigkeit an beiden Materialgrenzen kann der komplexe Durchlaßfaktor ermittelt werden [11], der die Transmission in den Raumteil ③ beschreibt:

$$\underline{d} = \frac{4 \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)^2 e^{\underline{\gamma}_2 l} - (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2)^2 e^{-\underline{\gamma}_2 l}} = d e^{j\Phi} \quad (18)$$

Dabei ist  $\underline{Z}_i = j\omega\mu_0/\gamma_i$  (für  $i = 1, 2, 3$ ) die Feldwellenimpedanz der  $H_{mn}$ -Welle im jeweiligen Raumteil. Der Phasenwinkel der transmittierten Welle folgt aus (18) zu

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2\alpha_2\beta_1}{\alpha_2^2 - \beta_1^2} \coth(\alpha_2 l)\right) & \text{für } \frac{\omega_c}{\sqrt{\epsilon_r}} \leq \omega \leq \omega_c \\ -\arctan\left(\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2\beta_1\beta_2} \tan(\beta_2 l)\right) & \text{für } \omega \geq \omega_c \end{cases} \quad (19)$$

Im Falle starker Dämpfung mit  $\alpha_2 l \gg 1$  gilt  $\coth(\alpha_2 l) \approx 1$  und die Phase der transmittierten Welle wird dann von der Länge  $l$  des Tunnelbereichs unabhängig. Für eine Modellbarriere mit  $a = 2,6 b$  und  $l = 8 b$  mit  $\epsilon_r = 2,37$  ist bei Einfall einer  $H_{10}$ -Welle der Verlauf  $\Phi(\omega)$  in Bild 9 dargestellt. Im Tunnelbereich wechselt die Phase von positiven zu negativen Werten, während sie im Wellenbereich stets nacheilend ist, wie auch in [7] gezeigt wurde. Aus dem Phasengang  $\Phi(\omega)$  kann man nach (5) die Gruppenlaufzeit der  $H_{10}$ -Welle durch den Raumteil ② der Länge  $l$  errechnen. Mit  $k_0 = \omega/c_0$  folgt daraus:

$$\frac{v_g(\omega)}{c_0} = -\frac{l}{d\Phi(\omega)/dk_0} \quad (20)$$

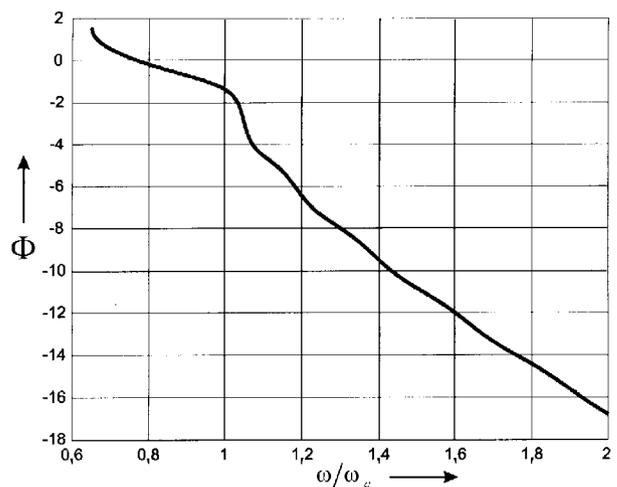


Bild 9: Phase  $\Phi$  des komplexen Durchlaßfaktors  $\underline{d}$  der cutoff-Barriere aus Bild 8. Im Tunnelbereich kann die Phase voreilen. Im Wellenbereich ist sie stets nacheilend.

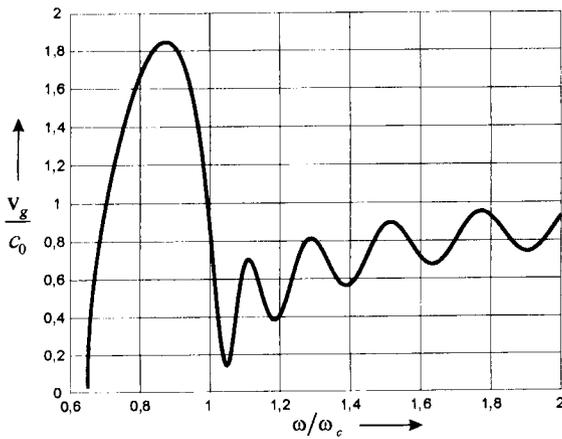


Bild 10: Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  einer  $H_{10}$ -Welle im Tunnelbereich der Länge  $l$  (Bild 8). Sie kann größer als die Vakuumlichtgeschwindigkeit werden.

Die Gruppengeschwindigkeit innerhalb der Modellbarriere kann für Längen  $l > 1,605 a$  superluminal werden. Ihr Verlauf für  $l = 8 b = 3,077 a$  ist in **Bild 10** dargestellt. Das Maximum der Kurve ist  $v_g = 1,849 c_0$  und liegt im evaneszenten Sperrbereich und zwar genau an einem Wendepunkt von  $\Phi(\omega)$ . Da für starke Dämpfung  $\alpha_2 l \gg 1$  die Phase von der Länge  $l$  unabhängig wird, lassen sich für längere Tunnelbereiche im Prinzip beliebig hohe Gruppengeschwindigkeiten erreichen, ja sogar  $v_g \rightarrow \infty$ . Die Phase der transmittierten Welle wird dann nur noch von den Diskontinuitäten an den beiden Raumteilgrenzen bestimmt. Daraus darf man aber nicht schließen, daß die Welle zum Durcheilen des Tunnels keine Zeit benötigt, da die Energiegeschwindigkeit stets subluminal bleibt. Berechnet nach der Definition (11) erhält man die im Querschnitt des Tunnelhohlleiters bei  $x = a/2$  bei maximale Energiegeschwindigkeit eines Paares zweier hin- und rücklaufender  $H_{10}$ -Wellen:

$$v_E(\Omega, z) = c_0 \frac{4 \Omega \sqrt{1 - \Omega^2} \operatorname{Im}\{\underline{\Gamma}^*\}}{2(2\Omega^2 - 1) \operatorname{Re}\{\underline{\Gamma}\} + e^{-2\alpha_2 z} + |\underline{\Gamma}|^2 e^{2\alpha_2 z}} \leq c_0. \quad (21)$$

Mit  $\Omega = \omega/\omega_c = k_0 a/\pi$  wurde in (21) eine auf die Grenzfrequenz der  $H_{10}$ -Welle normierte Frequenzvariable eingeführt. Der Ausdruck (21) gilt mit  $0 \leq z \leq l$  für Frequenzen im evaneszenten Bereich, also  $1/\sqrt{\epsilon_r} < \Omega < 1$ . Ferner bezeichnet

$$\underline{\Gamma} = \frac{\alpha_2 - j\beta_1}{\alpha_2 + j\beta_1} e^{-2\alpha_2 l} \quad (22)$$

den Reflexionsfaktor der  $H_{10}$ -Welle am Ende des Tunnelbereichs bei  $z = l$ . Wenn der Tunnelbereich reflexionsfrei abgeschlossen ist oder unendlich lang wird, d. h. für  $\underline{\Gamma} = 0$ , gibt es keine rücklaufende Welle mehr und die Energiegeschwindigkeit wird Null. Ein Transport von Wirkleistung durch Tunnelbereiche hindurch ist also nur durch die Superposition zweier evaneszenter Wellen gegensätzlicher Ausbreitungsrichtung möglich. Eine einzelne evaneszente Welle kann niemals Wirkleistung transportieren. Für die Werte  $\epsilon_r = 2,37$  und einer Länge des Tunnels von  $l = 2a$  ist im **Bild 11** der Verlauf von  $v_E(\Omega, z)/c_0$  im Bereich  $1/\sqrt{\epsilon_r} < \Omega < 1$  und  $0 \leq z/l \leq 1$  dreidimensional dargestellt. Die Energiegeschwindigkeit des  $H_{10}$ -Wellenpaares im Tunnelhohlleiter steigt für wachsendes  $z$  monoton an und erreicht ihr Maximum am Raumteilende bei  $z = l$ , wird aber niemals größer als  $c_0$ . Der Energietransport beschleunigt sich daher während des Tunnelvorgangs.

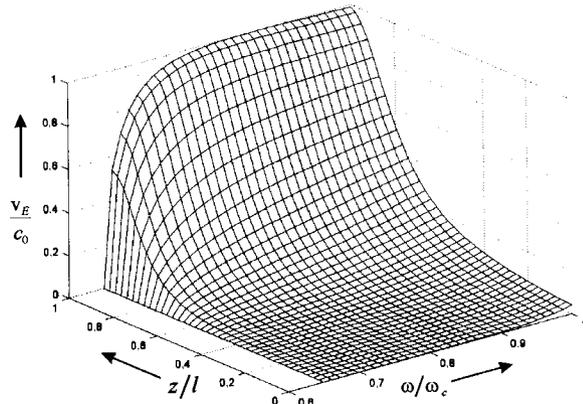


Bild 11: Die Geschwindigkeit  $v_E$  der Energie, die ein Paar zweier hin- und rücklaufender  $H_{10}$ -Wellen durch den Tunnelhohlleiter transportiert (Bild 8). Sie hängt von der Frequenz und vom Ort ab und ist niemals größer als  $c_0$ .

### 3.3 Hohlleiter mit cutoff-Verengung

In einem dielektrisch gefüllten Hohlleiter gleichbleibenden Querschnitts kann man durch Unterbrechung der Füllung einen Raumteil mit nicht ausbreitungsfähiger Welle erzeugen. Ein ähnlicher Effekt entsteht auch durch eine ausreichend starke Querschnittsverengung auf der Länge  $l$  eines leeren Hohlleiters (Bild 1). Ein Unterschied in beiden Anordnungen besteht darin, daß in ersterer nur ein einziger Wellentyp existiert, während in letzterer durch die Querschnittsänderungen auch höhere Eigenwellen angeregt werden, was die Analyse wesentlich aufwendiger macht. Die Streumatrix einer solchen cutoff-Verengung wurde mit Hilfe der Methode der Orthogonalentwicklung [17, 20] exakt bestimmt. Die ausführlichen Herleitungen findet man in [11], hier sollen nur die wesentlichen Ergebnisse zusammengefaßt werden.

Unterhalb der Grenzfrequenz des Tunnels, also für  $\omega < \omega_c$  kommt es zu keiner Wellenausbreitung mehr, sondern die Felder erfahren eine exponentielle, statische Dämpfung. Die Phase der nach dem Tunnel wieder neu angeregten Welle, die im allgemeinen nur noch eine sehr kleine Amplitude besitzt, wird in diesem Frequenzbereich alleine durch die Art der Querschnittsprünge am Beginn und Ende der Verengung festgelegt und ist daher von der Länge  $l$  unabhängig, weswegen sich für  $\omega < \omega_c$  beliebig große oder auch negative Gruppengeschwindigkeiten ergeben können [10]. Obwohl sich das Pulsmaximum im Tunnel also schneller als das Licht - ja sogar mit negativer Geschwindigkeit - bewegen kann, bleibt die Signalübertragung kausal. Die reinen Meßergebnisse aus [16] können somit aufgrund der Maxwell'schen Theorie verifiziert werden. Den dort vertretenen Schlußfolgerungen muß allerdings widersprochen werden. Eine superluminale Gruppengeschwindigkeit ist nämlich nicht dazu geeignet, Signale mit Überlichtgeschwindigkeit zu übermitteln [4, 29, 31]. Im Sinne der Quantilgeschwindigkeit spricht ein Detektor in einem homogenen Hohlleiter gleichbleibender Breite  $a_1$  auch stets schneller an, als nach Durchtunnelung einer Verengung  $a_2$  gleicher Länge (Bild 1).

### 4. Zusammenfassung

Die Übertragung von Informationen ist stets an den Transport einer meßbaren Energiemenge gebunden. Die in diesem Sinne definierte Quantilgeschwindigkeit beschreibt die Bewegung einer festen Energiemenge und entspricht völlig der Vorgehensweise im Experiment. Ein in seiner Empfindlichkeit gesteigerter Empfänger kann ein ankommendes Signal daher zeitlich früher detektieren, jedoch nicht bevor die allererste Wellenfront überhaupt eingetroffen ist. Diese Frontgeschwindigkeit eines jeden Signals ist immer gleich der Vakuumlichtgeschwindigkeit. Die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit jedoch können durchaus größere Werte als die Vakuumlichtgeschwindigkeit einnehmen oder sogar negativ

werden. In diesen Fällen verlieren diese Geschwindigkeitsdefinitionen ihren Sinn und verleiten zu falschen Schlußfolgerungen, denn niemals erscheint die Wirkung vor der Ursache. Scheinbare Verletzungen der Kausalität erweisen sich regelmäßig als Mißinterpretationen der Daten aufgrund unzulässiger Auslegung des Geschwindigkeitsbegriffs.

#### Literatur

- [1] Borgnis, F.: Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Energie monochromatischer elektromagnetischer Wellen in dielektrischen Medien. *Zs. f. Physik* 117 (1941) S. 642-650.
- [2] Born, M.; Wolf, E.: *Principles of Optics*. Cambridge: University Press, 1997.
- [3] Brillouin, L. *Wave propagation and group velocity*. New York: Academic Press, 1960.
- [4] Chiao, R. Y.; Kwiat, P. G.; Steinberg, A. M.: Schneller als das Licht? *Spektrum der Wissenschaft* (1993) S. 40-49.
- [5] Dahmen, H. D.; Gjonaj, E.: Wellenprozesse und Kausalität: Eine Untersuchung von elektromagnetischen Signalen in Hohlleitern variablen Querschnitts. *Workshop on Superluminal Velocities*, Universität Köln, 1998.
- [6] Einstein, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Ann. der Physik* 17 (1905) S. 891-921.
- [7] Emig, T.: Deutung der Tunnelzeiten bei evaneszenten elektromagnetischen Moden im Rahmen der klassischen Elektrodynamik. Diplomarbeit, Universität Köln, 1995.
- [8] Hoffmann, M. H. W.: *Hochfrequenztechnik*. Berlin: Springer, 1997.
- [9] Jackson, J. D.: *Klassische Elektrodynamik*. Berlin: de Gruyter, 1983.
- [10] Jäger, H. R.: Analyse der Ausbreitung von Impulsen in Mikrowellenschaltungen. Diplomarbeit, Fachhochschule Ravensburg-Weingarten, 1998.
- [11] Kark, K. W.: Zum Tunneleffekt in cutoff-Bereichen von Hohlleitern. *Kleinheubacher Berichte* 43, 2000.
- [12] Landau, L. D.; Lifschitz, E. M.: *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band 8: Elektrodynamik der Kontinua*. Thun: Harri Deutsch, 1990.
- [13] Marko, H.: Korrelation und Vorausbestimmung von Signalen. *VDE Fachberichte* 19 (1956).
- [14] Morgenstern, G.: Gruppenlaufzeit und Impulslaufzeit. *Arch. elektr. Übertr.* 25 (1971) S. 393-395.
- [15] Nimtz, G.: Instantanes Tunneln - Tunnelexperimente mit elektromagnetischen Wellen. *Phys. Bl.* 49 (1993) S. 1119-1120.
- [16] Nimtz, G.: Schneller als das Licht? *Physik in unserer Zeit* 28 (1997) S. 214-218.
- [17] Piefke, G.: Die Anwendung der Entwicklung nach Eigenfunktionen auf Beugungsprobleme in endlichen Gebieten. *Arch. elektr. Übertr.* 22 (1968) S. 275-281.
- [18] Piefke, G.: *Feldtheorie, Band I*. Mannheim: Bibliographisches Institut, 1977.
- [19] Piefke, G.: *Feldtheorie, Band II*. Mannheim: Bibliographisches Institut, 1973.
- [20] Piefke, G.: *Feldtheorie, Band III*. Mannheim: Bibliographisches Institut, 1977.
- [21] Rupprecht, W.: *Lineare Netzwerke mit negativer Gruppenlaufzeit*. Dissertation, Technische Hochschule Karlsruhe, 1961.
- [22] Schumann, W. O.: *Elektrische Wellen*. München: Hanser, 1948.
- [23] Sexl, R.; Urbantke, H. K.: *Relativität, Gruppen, Teilchen*. Wien: Springer, 1982.
- [24] Sommerfeld, A.: *Vorlesungen über Theoretische Physik, Band II: Mechanik der deformierbaren Medien*. Thun: Harri Deutsch, 1992.
- [25] Sommerfeld, A.: *Vorlesungen über Theoretische Physik, Band IV: Optik*. Thun: Harri Deutsch, 1978.
- [26] Sommerfeld, A.; Brillouin, L.: Über die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien. *Annalen der Physik* 44 (1914) S. 177-240.
- [27] Steinbuch, K.; Rupprecht, W.: *Nachrichtentechnik, Band II: Nachrichtenübertragung*. Mannheim: Springer, 1982.
- [28] Stratton, J. A.: *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill, 1941.
- [29] Thoma, P.; Weiland, T.: Wie real ist das Instantane Tunneln? *Phys. Bl.* 50 (1994) S. 313, 360, 361.
- [30] Czyliwicz, A.: On the Velocity of Information Transmitted via Systems with High-Pass Character. *Int. J. Electron. Commun. (AEÜ)* 53 (1999) S. 121-128.
- [31] Nitsch, J.: Werden Signale durch Tunnelstrecken wirklich mit Überlichtgeschwindigkeit übertragen? *Magdeburger Wissenschaftsjournal* 4 (1999) S. 11-19.

Prof. Dr.-Ing. K. W. Kark  
Fachhochschule Ravensburg-Weingarten  
Institut für Nachrichtentechnik  
Postfach 1261  
D-88241 Weingarten  
E-mail: kark@fbe.fh-weingarten.de

(Eingegangen am 24. 6. 1999)