

Finite-Elemente-Lösung von Eigenwellen in Hohlleitern mit geschichteter anisotroper Füllung

K. W. Kark

Institut für Nachrichtentechnik der Fachhochschule Ravensburg-Weingarten, Postfach 1261, D-88241 Weingarten, Tel.: 0751-501591, Fax: 0751-49240, e-mail: kark@fbe.fh-weingarten.de

Übersicht. Das Eigenwertproblem eines längshomogenen Hohlleiters mit beliebig geformter Berandung und geschichteter anisotroper Füllung wird mit Hilfe der Methode der finiten Elemente (FEM) numerisch gelöst. Die tensoriellen Feldgleichungen werden hergeleitet, und für gyrotrope Medien gelingt eine neue analytische Entkopplung der E- von den H-Feldern. Die entkoppelten Gleichungen werden numerisch gelöst und die Konvergenz der FEM-Lösung mit zunehmender Knotenzahl an verschiedenen Beispielen untersucht, insbesondere wird die Faraday-Drehung im Rundhohlleiter mit axialem Ferritstab betrachtet.

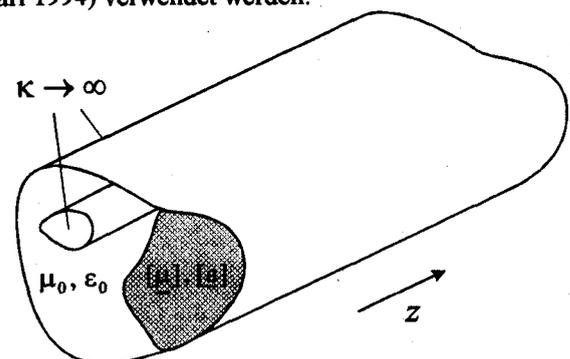
Abstract. The eigenvalue problem of a uniform hollow waveguide with boundaries of arbitrary shape filled with a layered anisotropic medium is solved numerically by means of the finite element method (FEM). The field equations are derived in tensor form. Electric and magnetic fields can be decoupled analytically for gyrotropic media. The novel decoupled equations are solved numerically and the convergence of the FEM solution with decreasing mesh size is investigated. The particular case of a circular cross-section waveguide with axial ferrite rod is studied in detail.

1 Einleitung

Wir wollen elektromagnetische Wellen in längshomogenen Hohlleitern suchen, bei denen der beliebig geformte Querschnitt unabhängig von der Koordinate z der Richtung der Wellenausbreitung ist. Auf den elektrisch ideal leitenden Rändern des Hohlleiters müssen die elektrische Feldstärke und die Normalableitung der magnetischen Feldstärke verschwinden. Die Grenzfrequenzen der Eigenwellen hängen von den Querschnittsabmessungen des Hohlleiters und von den Materialeigenschaften einer oder mehrerer im Hohlleiter vorhandener Füllungen ab. Der Hohlleiterquerschnitt sei wie in Bild 1 elektrisch ideal leitend begrenzt und beliebig einfach oder mehrfach zusammenhängend, d.h. ohne bzw. mit einem oder mehreren Innenleitern. Der Raum zwischen den Leitern soll durch ein geschichtetes anisotropes Medium gefüllt sein.

Bild 1: Die homogene Leitung mit geschichteter anisotroper Füllung.

Die Lösung solcher Leitungsprobleme mit komplizierten Querschnitten kann i.a. nicht in analytischer Form dargestellt werden. Man ist vielmehr auf numerische Verfahren zur Bestimmung der Feldbilder und der Grenzfrequenzen angewiesen (Davies und Muilwyk 1966; Weiland 1977; Navarro und Such 1992). In dieser Arbeit soll hierzu die Methode der finiten Elemente (Schwarz 1991; Kost 1994; Silvester und Ferrari 1994) verwendet werden.



2 Feldgleichungen in anisotropen Medien

Für harmonische Zeitabhängigkeit $e^{j\omega t}$ lauten die quellenfreien Maxwell'schen Gleichungen

$$\operatorname{rot} \underline{\vec{H}} = j \omega \underline{\vec{D}} \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \underline{\vec{E}} = -j \omega \underline{\vec{B}}. \quad (1)$$

Die ortsabhängigen Phasoren der elektromagnetischen Feldvektoren werden zur Kennzeichnung ihres komplexen Charakters unterstrichen. Wird in das elektromagnetische Feld des Vakuums ein i.a. verlustbehaftetes Medium mit

den frequenzabhängigen Eigenschaften Permeabilität $\underline{\mu}(\omega)$ und Permittivität $\underline{\varepsilon}(\omega)$ eingeführt, so gelten die Materialgleichungen $\underline{\vec{B}} = \underline{\mu} \underline{\vec{H}}$ und $\underline{\vec{D}} = \underline{\varepsilon} \underline{\vec{E}}$. In anisotropen Medien müssen für die Vektorkomponenten statt dessen Tensorgleichungen verwendet werden:

$$\underline{B}_i = \sum_{j=1}^3 \underline{\mu}_{i,j} \underline{H}_j \quad \text{und} \quad \underline{D}_i = \sum_{j=1}^3 \underline{\varepsilon}_{i,j} \underline{E}_j. \quad (2)$$

Der Index $i = 1, 2, 3$ kann z.B. für die kartesischen Vektorkomponenten in x -, y - oder z -Richtung stehen. Bei symmetrischen Materialtensoren, also z.B. $\underline{\mu}_{i,j} = \underline{\mu}_{j,i}$, hat man ein reziprokes Medium. Ein nichtreziprokes Medium ist dagegen durch einen hermiteschen Tensor $\underline{\mu}_{i,j} = \underline{\mu}_{j,i}^*$ gekennzeichnet.

2.1 Die Maxwell'schen Gleichungen

Wir wollen annehmen, daß sich eine elektromagnetische Welle in die positive z -Richtung in einem längshomogenen Medium ausbreitet. Mit der i.a. komplexen Ausbreitungskonstante $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = j\underline{k}_z$, kann somit der Ausbreitungsterm $e^{-\underline{\gamma}z}$ separiert werden:

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}} &= [\underline{E}_x(x,y)\underline{\vec{e}}_x + \underline{E}_y(x,y)\underline{\vec{e}}_y + \underline{E}_z(x,y)\underline{\vec{e}}_z] e^{-\underline{\gamma}z} \\ \underline{\vec{H}} &= [\underline{H}_x(x,y)\underline{\vec{e}}_x + \underline{H}_y(x,y)\underline{\vec{e}}_y + \underline{H}_z(x,y)\underline{\vec{e}}_z] e^{-\underline{\gamma}z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Mit den nunmehr nur noch von den Querschnittskoordinaten x und y abhängigen sechs Feldkomponenten folgen aus (1), (2) und (3) die Maxwell'schen Gleichungen für anisotrope, längshomogene Medien:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} + \underline{\gamma} \underline{H}_y &= j\omega (\underline{\varepsilon}_{11} \underline{E}_x + \underline{\varepsilon}_{12} \underline{E}_y + \underline{\varepsilon}_{13} \underline{E}_z) & \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} + \underline{\gamma} \underline{E}_y &= -j\omega (\underline{\mu}_{11} \underline{H}_x + \underline{\mu}_{12} \underline{H}_y + \underline{\mu}_{13} \underline{H}_z) \\ -\underline{\gamma} \underline{H}_x - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} &= j\omega (\underline{\varepsilon}_{21} \underline{E}_x + \underline{\varepsilon}_{22} \underline{E}_y + \underline{\varepsilon}_{23} \underline{E}_z) & \text{und} & -\underline{\gamma} \underline{E}_x - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} &= -j\omega (\underline{\mu}_{21} \underline{H}_x + \underline{\mu}_{22} \underline{H}_y + \underline{\mu}_{23} \underline{H}_z) \\ \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} &= j\omega (\underline{\varepsilon}_{31} \underline{E}_x + \underline{\varepsilon}_{32} \underline{E}_y + \underline{\varepsilon}_{33} \underline{E}_z) & \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} &= -j\omega (\underline{\mu}_{31} \underline{H}_x + \underline{\mu}_{32} \underline{H}_y + \underline{\mu}_{33} \underline{H}_z). \end{aligned} \quad (4)$$

2.2 Entkopplung der Feldgleichungen für gyrotrope Medien

Gyrotrope Medien sind ein Spezialfall anisotroper Stoffe, bei denen die Matrix des Permeabilitäts- bzw. Permittivitätstensors folgende Gestalt aufweist

$$[\underline{\mu}] = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_{11} & \underline{\mu}_{12} & 0 \\ \underline{\mu}_{21} & \underline{\mu}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\mu}_{33} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad [\underline{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_{11} & \underline{\varepsilon}_{12} & 0 \\ \underline{\varepsilon}_{21} & \underline{\varepsilon}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Mit (5) können durch Ineinandereinsetzen der Gln. (4) die elektrischen von den magnetischen Feldkomponenten entkoppelt werden. Für die Reduktion der Gleichungen bilden die raumladungsfreien Divergenzgleichungen

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{\vec{B}} = \text{div}([\underline{\mu}]\underline{\vec{H}}) = 0 & \Leftrightarrow \underline{\mu}_{11} \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial x} + \underline{\mu}_{12} \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} + \underline{\mu}_{21} \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} + \underline{\mu}_{22} \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial y} - \underline{\gamma} \underline{\mu}_{33} \underline{H}_z = 0 \\ \text{div } \underline{\vec{D}} = \text{div}([\underline{\varepsilon}]\underline{\vec{E}}) = 0 & \Leftrightarrow \underline{\varepsilon}_{11} \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial x} + \underline{\varepsilon}_{12} \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} + \underline{\varepsilon}_{21} \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} + \underline{\varepsilon}_{22} \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} - \underline{\gamma} \underline{\varepsilon}_{33} \underline{E}_z = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ein notwendiges Hilfsmittel. Wir wollen die langwierige Zwischenrechnung überschlagen und nach Elimination der Magnetfelder direkt das gekoppelte System für \underline{E}_x und \underline{E}_y angeben:

$$\left[\frac{\underline{\epsilon}_{11}}{\underline{\epsilon}_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\underline{\mu}_{22}}{\underline{\mu}_{33}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\underline{\epsilon}_{21}}{\underline{\epsilon}_{33}} + \frac{\underline{\mu}_{21}}{\underline{\mu}_{33}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \omega^2 (\underline{\mu}_{22} \underline{\epsilon}_{11} - \underline{\mu}_{21} \underline{\epsilon}_{21}) - \underline{k}_x^2 \right] \underline{E}_x +$$

$$+ \left[\left(\frac{\underline{\epsilon}_{12}}{\underline{\epsilon}_{33}} - \frac{\underline{\mu}_{21}}{\underline{\mu}_{33}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\underline{\epsilon}_{22}}{\underline{\epsilon}_{33}} - \frac{\underline{\mu}_{22}}{\underline{\mu}_{33}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \omega^2 (\underline{\mu}_{22} \underline{\epsilon}_{12} - \underline{\mu}_{21} \underline{\epsilon}_{22}) \right] \underline{E}_y = 0 \quad (7a)$$

$$\left[\frac{\underline{\mu}_{11}}{\underline{\mu}_{33}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\underline{\epsilon}_{22}}{\underline{\epsilon}_{33}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\underline{\epsilon}_{12}}{\underline{\epsilon}_{33}} + \frac{\underline{\mu}_{12}}{\underline{\mu}_{33}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \omega^2 (\underline{\mu}_{11} \underline{\epsilon}_{22} - \underline{\mu}_{12} \underline{\epsilon}_{12}) - \underline{k}_x^2 \right] \underline{E}_y +$$

$$+ \left[\left(\frac{\underline{\epsilon}_{21}}{\underline{\epsilon}_{33}} - \frac{\underline{\mu}_{12}}{\underline{\mu}_{33}} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\underline{\epsilon}_{11}}{\underline{\epsilon}_{33}} - \frac{\underline{\mu}_{11}}{\underline{\mu}_{33}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \omega^2 (\underline{\mu}_{11} \underline{\epsilon}_{21} - \underline{\mu}_{12} \underline{\epsilon}_{11}) \right] \underline{E}_x = 0 \quad (7b)$$

Dabei wurde $\underline{\gamma}^2 = -\underline{k}_x^2$ gesetzt. Im isotropen Spezialfall hat man keine Materialtensoren, sondern die skalaren Größen $\underline{\mu}$ und $\underline{\epsilon}$, und das Gleichungssystem (7) entkoppelt zu

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2 \underline{\mu} \underline{\epsilon} - \underline{k}_x^2 \right] \underline{E}_x = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2 \underline{\mu} \underline{\epsilon} - \underline{k}_x^2 \right] \underline{E}_y = 0. \quad (8)$$

Für den biaxialen Spezialfall, in dem die Materialeigenschaften durch Diagonaltensoren ausgedrückt werden können, gibt Weiland (1977) einfachere Gleichungen an, die sich aus (7) ohne weiteres ergeben. Aus (4) kann auch ein zu (7) äquivalentes System für \underline{H}_x und \underline{H}_y hergeleitet werden, falls jetzt die elektrischen Feldkomponenten eliminiert werden. Zum selben Ergebnis führt auch ein schnellerer Weg über die Fitzgeraldsche Transformation von (7). Hat man erst einmal den Eigenwert \underline{k}_x^2 mitsamt den Lösungen \underline{E}_x und \underline{E}_y von (7) bestimmt, so folgendes alle weiteren vier Feldkomponenten des gyrotropen Mediums aus (4).

3 Die Methode der finiten Elemente

Die Methode der finiten Elemente (FEM) wurde ursprünglich für Probleme aus der Elastomechanik entwickelt. Festigkeitsberechnungen und die Bestimmung der mechanischen Beanspruchung von Tragwerken standen zunächst im Vordergrund. Erst später wurde das Verfahren erfolgreich zur numerischen Berechnung von elektromagnetischen Feldern angewandt. Zu dem Programmpaket MATLAB[®] ist eine Partial Differential Equation (PDE) – Toolbox erhältlich, die in der Lage ist mit Hilfe der Methode der finiten Elemente ein gekoppeltes Eigenwertproblem von folgender Art zu behandeln:

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{c}_{11}^A & \underline{c}_{11}^B \\ \underline{c}_{11}^C & \underline{c}_{11}^D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial \underline{u}_1 / \partial x \\ \partial \underline{u}_1 / \partial y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{c}_{12}^A & \underline{c}_{12}^B \\ \underline{c}_{12}^C & \underline{c}_{12}^D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial \underline{u}_2 / \partial x \\ \partial \underline{u}_2 / \partial y \end{pmatrix} - \underline{a}_{11} \underline{u}_1 - \underline{a}_{12} \underline{u}_2 + \underline{\Lambda} \underline{d}_{11} \underline{u}_1 + \underline{\Lambda} \underline{d}_{12} \underline{u}_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{c}_{21}^A & \underline{c}_{21}^B \\ \underline{c}_{21}^C & \underline{c}_{21}^D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial \underline{u}_1 / \partial x \\ \partial \underline{u}_1 / \partial y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \underline{c}_{22}^A & \underline{c}_{22}^B \\ \underline{c}_{22}^C & \underline{c}_{22}^D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial \underline{u}_2 / \partial x \\ \partial \underline{u}_2 / \partial y \end{pmatrix} - \underline{a}_{21} \underline{u}_1 - \underline{a}_{22} \underline{u}_2 + \underline{\Lambda} \underline{d}_{21} \underline{u}_1 + \underline{\Lambda} \underline{d}_{22} \underline{u}_2 = 0 \quad (9)$$

Man muß nur $\underline{u}_1 = \underline{E}_x$ sowie $\underline{u}_2 = \underline{E}_y$ setzen, den Eigenwert $\underline{\Lambda}$ mit \underline{k}_x^2 identifizieren und dann die sechs (2×2) -Matrizen $[\underline{c}_{11}]$, $[\underline{c}_{12}]$, $[\underline{c}_{21}]$, $[\underline{c}_{22}]$, $[\underline{a}]$ und $[\underline{d}]$ durch Vergleich mit (7) belegen. Dann werden die Feldgleichungen für gyrotrope Medien mit Hilfe der PDE-Toolbox in ein äquivalentes Variationsproblem übergeführt, dessen Lösung den Zustand kleinstmöglicher Gesamtenergie beschreibt, der sich bei physikalischen Problemen auf natürliche Weise einstellt. Bei der Methode der finiten Elemente wird der felderfüllte Leitungsquerschnitt in möglichst gleichseitige Dreieckselemente diskretisiert, auf denen in der MATLAB[®] PDE-Toolbox ein linearer Lösungsansatz (Polynom der Ordnung $p = 1$) gemacht wird. Die Feldwerte an den Knotenpunkten des Dreiecksgitters können nach Zusammenfassen aller Dreiecke des Querschnitts und unter Berücksichtigung der Randbedingungen aus einem linearen Gleichungssystem ermittelt werden, das aus dem Variationsproblem gewonnen wird. Da nicht jeder Knoten mit jedem anderen

Knoten verbunden ist, ist das lineare Gleichungssystem nur schwach besetzt. Durch eine geeignete Knotennumerierung läßt sich erreichen, daß die wenigen von Null verschiedenen Elemente der Matrix in einem schmalen Band symmetrisch zur Hauptdiagonalen zu liegen kommen, wodurch eine kompakte Speicherung möglich wird.

3.1 FEM-Diskretisierungsfehler und Aitken-Extrapolation

Die Genauigkeit der numerischen Ergebnisse der Finite-Elemente-Methode verbessert sich mit zunehmender Netzverfeinerung. Nach Kost (1994) kann der FEM-Approximationsfehler mit

$$\|e\| = O(h^p) \quad \text{für Gebiete ohne Kantensingularität} \quad (10)$$

angegeben werden. Dabei ist $h = 1/N$ die Maschenweite der Triangulierung, die innerhalb eines zweidimensionalen Gebiets umgekehrt proportional zur Anzahl N der Dreiecke ist. Für $h \rightarrow 0$ wird tatsächlich die exakte Lösung des Problems gefunden. Für die Konvergenzgeschwindigkeit ist neben der Ordnung p des Polynomansatzes auch die Intensität eventuell vorhandener Kantensingularitäten von Bedeutung (Kark 1997). An einer ideal leitenden, geradlinigen Kante mit dem äußeren Kantwinkel $\pi < \varphi_0 < 2\pi$ werden die Felder quer zur Kante singulär, während die Längsfeldstärken verschwinden. Mit dem Parameter $s = \pi/\varphi_0$ gilt dann nach Kost (1994)

$$\|e\| = O(h^{\min(p, s)}) \quad \text{für Gebiete mit Kantensingularität} \quad (11)$$

Darum ist in der Nähe einer Singularität mit $0,5 < s < 1$ die p -Verfeinerung wirkungslos. Nur die h -Verfeinerung des Gitters kann dort noch die numerische Genauigkeit erhöhen. Bei der MATLAB® PDE-Toolbox vervierfacht jede h -Verfeinerung die Anzahl N der Dreiecke. Wenn diese beim Startgitter mit N_1 bezeichnet wird, dann hängt der korrekte Eigenwert $\underline{\Lambda}$ von (9) mit den ersten drei Näherungslösungen $\underline{\Lambda}_1$, $\underline{\Lambda}_2$ und $\underline{\Lambda}_3$ wie folgt zusammen:

$$\underline{\Lambda} = \begin{cases} \underline{\Lambda}_1 + \underline{C} \cdot N_1^{-\min(p, s)} & \text{für das Startgitter} \\ \underline{\Lambda}_2 + \underline{C} \cdot (4 N_1)^{-\min(p, s)} & \text{für die 1. Gitterverfeinerung} \\ \underline{\Lambda}_3 + \underline{C} \cdot (16 N_1)^{-\min(p, s)} & \text{für die 2. Gitterverfeinerung.} \end{cases} \quad (12)$$

Dabei ist \underline{C} eine problemabhängige, komplexe Konstante. Mit Hilfe der Aitken-Extrapolation, die mit $q = 4^p$ bzw. $q = 4^{\min(p, s)}$ am einfachsten durch das spaltenweise zu berechnende Romberg-Schema (Törnig 1979)

$$\begin{array}{ccc} \underline{\Lambda}_{1,1} & & \\ \downarrow & \underline{\Lambda}_{2,1} & \underline{\Lambda}_{2,2} \\ & \underline{\Lambda}_{3,1} & \underline{\Lambda}_{3,2} & \underline{\Lambda}_{3,3} \\ \rightarrow & & & \end{array} \quad \text{mit} \quad \underline{\Lambda}_{i,j} = \frac{q^{j-1} \cdot \underline{\Lambda}_{i,j-1} - \underline{\Lambda}_{i-1,j-1}}{q^{j-1} - 1} \quad \text{für } i, j \geq 2 \quad (13)$$

dargestellt werden kann, erhält man ohne besonderen Rechenaufwand eine wesentlich genauere Darstellung des korrekten Eigenwerts $\underline{\Lambda}$. Dazu belegt man die erste Spalte von (13) mit den FEM-Näherungslösungen $\underline{\Lambda}_{1,1} = \underline{\Lambda}_1$, $\underline{\Lambda}_{2,1} = \underline{\Lambda}_2$ und $\underline{\Lambda}_{3,1} = \underline{\Lambda}_3$ und errechnet sich für $i, j \geq 2$ die extrapolierten Werte $\underline{\Lambda}_{i,j}$. Am genauesten ist dann die rechts unten stehende Eigenwertnäherung (hier $\underline{\Lambda}_{3,3}$), deren Fehler man durch Vergleich mit ihren Nachbarelementen abschätzen kann.

4 Numerische Ergebnisse

4.1 Elliptischer Zylinder

Zum Verifizieren des FEM-Verfahrens wurde zunächst ein leerer Hohlleiter mit elliptischem Querschnitt untersucht, dessen Feldbilder und Grenzfrequenzen exakt bekannt sind. Aus (8) folgt die vektorielle Helmholtz-Gleichung der Eigenwellen des elliptischen Zylinders an der Grenzfrequenz mit $k_c^2 = \omega_c^2 \mu_0 \epsilon_0$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right] (\underline{E}_x \bar{e}_x + \underline{E}_y \bar{e}_y) = 0. \quad (14)$$

Der elliptische Querschnitt wird durch die große Halbachse a und die kleine Halbachse b vollständig beschrieben. Auf dem Rand des Hohlleiters muß die Dirichlet-Randbedingung $\vec{n} \times \vec{E} = 0$ erfüllt werden, die man auch wie $y \underline{E}_x - (b/a)^2 x \underline{E}_y = 0$ schreiben kann. Die Konvergenz der FEM-Näherungen für die Eigenwerte $\Lambda = (k_c b)^2$ der niedrigsten drei E-Wellen sind in Tabelle 1 für den Fall $a = 2b$ dargestellt.

	Dreiecke im FEM-Gitter				Extrapoliert nach (13)	Schneemann (1970)	Davies und Muilwyk (1966)
	$N_1 = 140$	$4 N_1 = 560$	$16 N_1 = 2240$	$64 N_1 = 8960$			
Λ_{E_1}	3,6545	3,5886	3,5722	3,5681	3,5667	3,573	3,5667
Λ_{E_2}	6,5484	6,3428	6,2922	6,2796	6,2754	-	-
Λ_{E_3}	10,7440	10,2063	10,0726	10,0394	10,0284	10,029	-

Tabelle 1. Quadrat der normierten Grenzwellenzahl $\Lambda = (k_c b)^2$ der ersten drei E-Wellen im elliptischen Hohlleiter mit $a = 2b$.

Die berechneten magnetischen Feldlinien der drei E-Wellen sind in Bild 2 dargestellt. Sie wurden als Höhenlinien von $\partial \underline{E}_x / \partial x + \partial \underline{E}_y / \partial y$ gezeichnet.

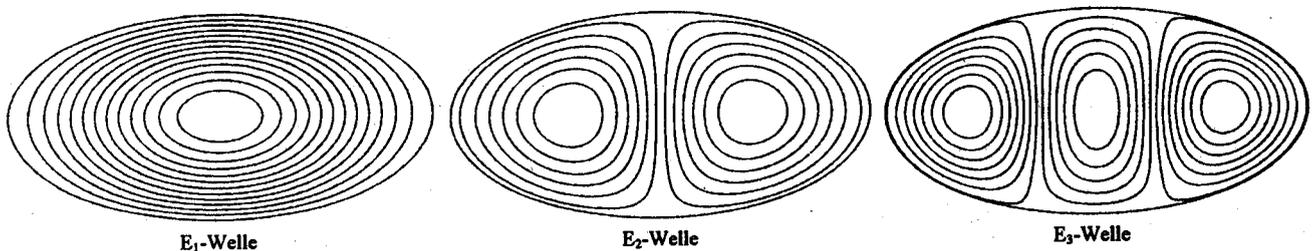


Bild 2. Magnetfeldlinien der ersten drei E-Wellen im elliptischen Hohlleiter mit $a = 2b$.

4.2 Faraday-Rotation im Rundhohlleiter

In gesättigten Ferriten mit Vormagnetisierung $\vec{H}_0 = H_0 \vec{e}_z$ in Richtung der Wellenausbreitung kann der hermitesche Permeabilitätstensor wie folgt angegeben werden (Polder 1949):

$$[\underline{\mu}] = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 & j \underline{\mu}_2 & 0 \\ -j \underline{\mu}_2 & \underline{\mu}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\mu}_0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{\underline{\mu}_1}{\underline{\mu}_0} = 1 + \frac{(\omega_0 + j \omega_v) \cdot \omega_m}{(\omega_0 + j \omega_v)^2 - \omega^2} \quad \text{und} \quad \frac{\underline{\mu}_2}{\underline{\mu}_0} = \frac{\omega \cdot \omega_m}{(\omega_0 + j \omega_v)^2 - \omega^2} \quad (15)$$

Als Abkürzungen werden die drei Kreisfrequenzen $\omega_0 = \Gamma H_0$, $\omega_m = \Gamma M_s$ und $\omega_v = \Gamma \Delta H / 2$ eingeführt. Dabei ist H_0 ein alle Wechselanteile dominierendes magnetisches Gleichfeld in z-Richtung, während M_s als Sättigungsmagnetisierung und ΔH als Halbwertsbreite der gyromagnetischen Resonanz im Ferrit bezeichnet werden. Das gyromagnetische Verhältnis $\Gamma > 0$ der präzedierenden Elektronen im Ferrit hängt über den Landé-Faktor g mit dem gyromagnetischen Verhältnis $\Gamma_0 = \mu_0 e / m_e = 2,210177 \cdot 10^7$ cm/As eines freien Elektrons wie $\Gamma = 0,5 g \Gamma_0$ zusammen. Bei üblichen Mikrowellenferriten liegt g zwischen 1,5 und 2,5. Die gyromagnetische Resonanzfrequenz (Larmor-Frequenz), die Frequenz der magnetischen Sättigung und die Verlustfrequenz werden in dieser Reihenfolge mit f_0 , f_m und f_v bezeichnet. Als notwendige Sättigungsbedingung findet man bei Wolff (1973) $H_0 > (50 \dots 100) A/cm$ und bei Lange (1983) $H_0 > M_s / 10$.

Eine linear polarisierte TEM-Welle, die sich im Ferrit in Richtung der Vormagnetisierung $H_0 \vec{e}_z$ ausbreitet, spaltet sich aufgrund der doppelbrechenden Eigenschaften des Polder-Tensors in zwei zirkular polarisierte TEM-Wellen mit unterschiedlichen Ausbreitungskonstanten $\underline{\gamma}_\pm = \alpha_\pm + j \beta_\pm$ auf. Bei Blick in Richtung der Wellenausbreitung wird die rechtsdrehende Welle (RHC) mit + gekennzeichnet, während die linksdrehende (LHC) mit - symbolisiert sei. Nur die RHC-Welle tritt in starke Resonanzwechselwirkung mit den in gleichem Sinne präzedierenden Elektronen des Ferrits. Nach einer Weglänge l dreht sich (bei gleicher Dämpfung $\alpha_+ = \alpha_-$) die Polarisationssebene gerade um einen Winkel $\Theta = (\beta_- - \beta_+) l / 2$. Für unterschiedliche Dämpfung erhält man außerdem eine Exzentrizität der gedrehten Polarisationsellipse von $e = 1 / \cosh [(\alpha_- - \alpha_+) l / 2]$. Durch Diagonalisierung des Polder-Tensors findet man

$$\underline{\gamma}_\pm = j \omega \sqrt{(\underline{\mu}_1 \pm \underline{\mu}_2) \underline{\epsilon}_F} \quad (16)$$

Dabei ist $\underline{\epsilon}_p = \epsilon_r \epsilon_0 (1 - j \tan \delta_e)$ die komplexe Permittivität des Ferrits. Im verlustfreien Fall ist der Drehwinkel

$$\Theta = \frac{k_0 l}{2} \sqrt{\epsilon_r} \left[\sqrt{1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 + \omega}} - \sqrt{1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 - \omega}} \right] \quad \text{mit} \quad k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (17)$$

Unterhalb der Resonanzfrequenz ($f < f_0$) gilt $\Theta < 0$, d.h. wenn man in Richtung der Wellenausbreitung blickt, so erfolgt die Drehung der Polarisationssebene gegen den Uhrzeigersinn. Oberhalb der Resonanzfrequenz sind die Verhältnisse gerade umgekehrt. Für $f \gg f_0$ gilt näherungsweise $\Theta/l \approx \pi f_m \sqrt{\epsilon_r} / c_0$, und damit wird die Größe der Faraday-Drehung unabhängig von der Frequenz (Hogan 1952), was für breitbandige Anwendungen von Bedeutung ist. Im Frequenzbereich $f_0 < f < f_0 + f_m$ wird die RHC-Welle aufgrund der engen Resonanzkopplung sehr stark gedämpft und ist praktisch nicht ausbreitungsfähig. Ein im runden Hohlleiter coaxial angebrachter Ferritstab der Länge l mit geeigneter Dicke d kann das Feldbild der H_{11} -Grundwelle in ähnlicher Weise drehen, wie ein unendlich ausgedehntes Ferritmedium dasjenige der TEM-Welle. Die Verhältnisse liegen aufgrund der zylindrischen, anisotrop geschichteten Struktur mit Grenzfrequenzen und Oberwellen jedoch wesentlich komplizierter. Etwa ab einem Durchmesser Verhältnis von $d/D > 0,2$ wird ein E_{01} artiger Wellentyp ausbreitungsfähig.

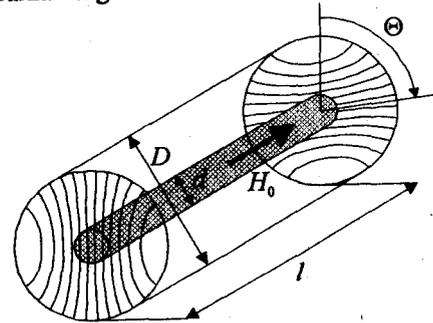


Bild 3. Faraday-Drehung der Grundwelle im Rundhohlleiter durch axialen Ferritstab mit Vormagnetisierung H_0 .

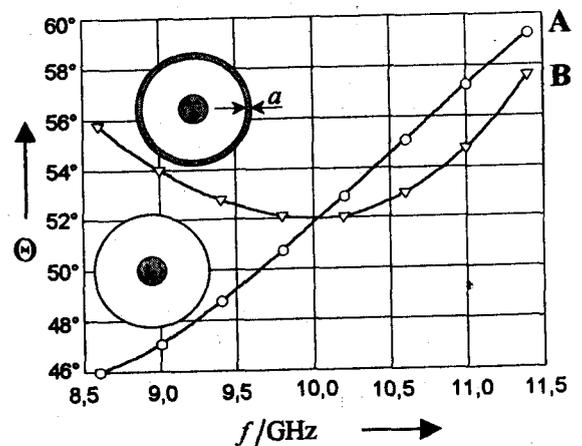
Die FEM-Lösung des Eigenwertproblems (9) eines längshomogenen Kreiszyinders mit axialem Ferritstab nach Bild 3 liefert die komplexen Eigenwerte $\underline{\Lambda} = k_z^2$ sowohl der Grundwelle als auch der Oberwellen. Aus der Differenz der Phasenkonstanten der links- bzw. rechtsdrehenden HE_{11} -Welle kann der Drehwinkel der Faraday-Rotation

$$\Theta = \frac{l}{2} \cdot \text{Re} \left\{ \sqrt{\underline{\Lambda}_{-}^{HE_{11}}} - \sqrt{\underline{\Lambda}_{+}^{HE_{11}}} \right\} = \frac{l}{2} \cdot (\beta_{-}^{HE_{11}} - \beta_{+}^{HE_{11}}) \quad (18)$$

bestimmt werden. Für einen X-Band Rundhohlleiter mit Innendurchmesser $D = 20,244$ mm und einen Ferritstab der Dicke $d = 3,5$ mm wurden die Drehwinkel im Frequenzbereich $8,6 \text{ GHz} \leq f \leq 11,4 \text{ GHz}$ berechnet. Mit den Ferritdaten $\underline{\epsilon}_p = 11,3 \cdot \epsilon_0 (1 - j 2 \cdot 10^{-4})$, $H_0 = 300 \text{ A/cm}$, $M_s = 1030 \text{ A/cm}$ und $\Delta H = 40 \text{ A/cm}$ folgen bei $g = 1,97$ die Frequenzen $f_0 = 1,04 \text{ GHz}$, $f_m = 3,57 \text{ GHz}$ und $f_v = 69,3 \text{ MHz}$. Es gilt daher die übliche Dimensionierung $f \gg f_0$ und $f > f_0 + f_m$. Mit steigender Frequenz wächst in Bild 4 die Drehung der HE_{11} -Hohlleiterwelle in einem weiten Bereich nahezu linear an (Kurve A) und wird nicht frequenzunabhängig wie es bei der TEM-Welle im unendlich ausgedehnten Ferritmedium der Fall ist. Ohm (1956) und Severin (1959) schlugen deshalb vor, die Faraday-Drehung durch eine dielektrische Beschichtung des Rundhohlleiters breitbandiger zu machen.

Die numerischen FEM-Ergebnisse für eine Innenbeschichtung des Rundhohlleiters mit einem Dielektrikum $\underline{\epsilon}_D = \underline{\epsilon}_F$ der Dicke $a = 0,96$ mm (Kurve B) sind ebenfalls in Bild 4 dargestellt. Die dielektrische Schicht wirkt bei der rechtsdrehenden Welle einer Feldkonzentration im Ferrit kompensierend entgegen (Bild 5). Die Phasenkonstante $\beta_{+}^{HE_{11}}$ wird dadurch stark angehoben, während $\beta_{-}^{HE_{11}}$ sich nur wenig erhöht. Für die geringere Frequenzabhängigkeit müssen darum kleinere Drehwinkel Θ pro Länge l in Kauf genommen werden. Außerdem werden durch die Beschichtung mehrere Oberwellen ausbreitungsfähig, während bei Kurve A ausschließlich die gewünschten rechts- und linksdrehenden HE_{11}^{\pm} Wellen vorhanden sind.

Bild 4. Faraday-Drehung der Grundwelle im Rundhohlleiter mit axialem Ferritstab der Länge $l = 1$ cm (Kurve A). Durch eine zusätzliche dielektrische Innenbeschichtung des Rundhohlleiters (Kurve B) wird eine geringere Frequenzabhängigkeit erzielt. Das Dielektrikum schwächt den Faraday-Effekt, weswegen die Kurve B für $l = 4,9$ cm berechnet wurde. An der Mittenfrequenz $f = 10 \text{ GHz}$ ergibt sich dann ungefähr der gleiche Drehwinkel von ca. 52° . Es wurden FEM-Gitter mit 4416 Dreiecken (A) bzw. 4044 Dreiecken (B) verwendet.



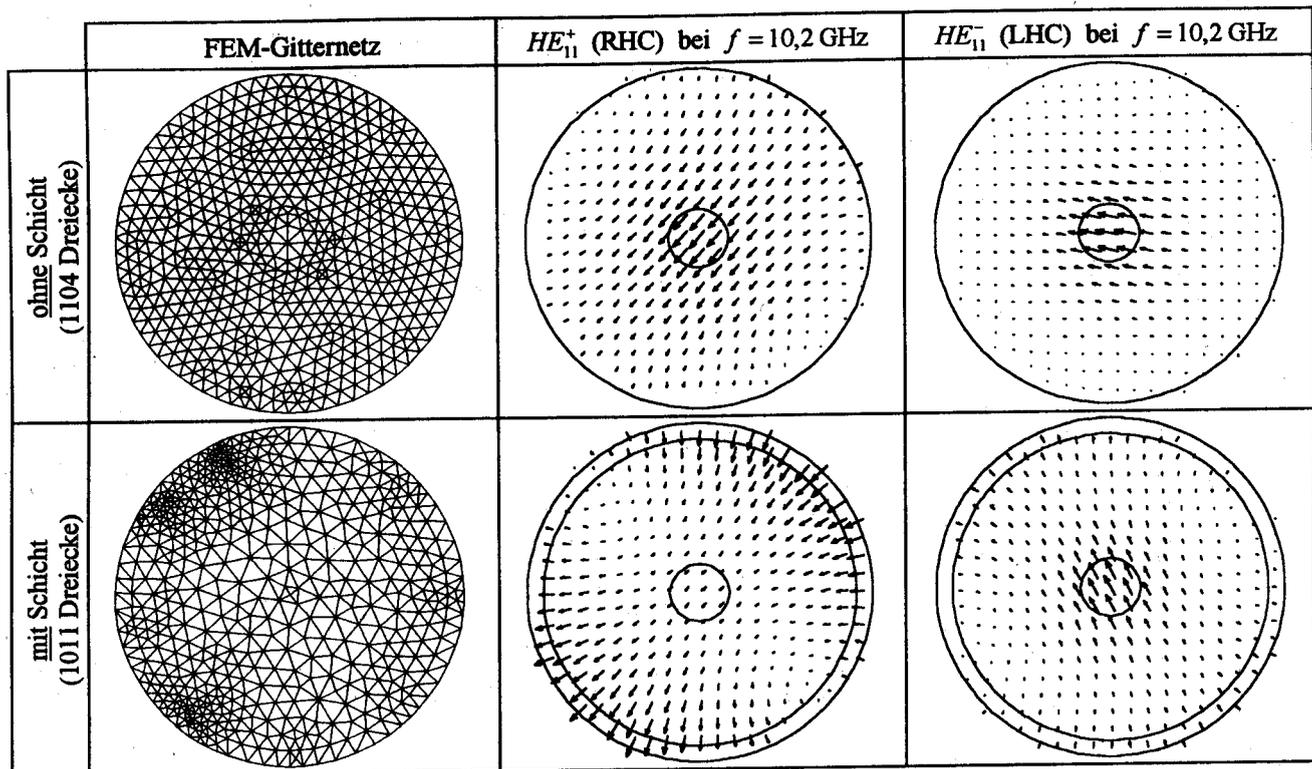


Bild 5. Elektrische Feldstärke im Faraday-Dreher. Die rechtsdrehende Welle wird durch eine Beschichtung viel stärker beeinflusst als die linksdrehende. Aus Gründen der Darstellung wird eine Triangulierung mittlerer Dichte gezeigt, während die Feldbilder mit der vierfachen Dreieckszahl erzeugt wurden.

5 Zusammenfassung

Die Methode der finiten Elemente (FEM) hat sich für elektromagnetische Eigenwertprobleme bei beliebig berandeten Hohlleitern mit geschichteter anisotroper Füllung als sehr leistungsfähig erwiesen. Ihre flexible Netzgenerierung ermöglicht trotz geringer Anzahl der Gitterpunkte bereits eine gute Genauigkeit, die durch Extrapolation noch wesentlich gesteigert werden kann. Probleme mit unechten Lösungen (spurious modes) treten keine auf, weil für die FEM nur die transversalen Feldstärken und keine Längsfelder verwendet werden. Es wurden ausschließlich längshomogene Strukturen untersucht, da kein dreidimensionales finite Elemente Verfahren zugänglich war. Neben Hohlleitern mit Ferritfüllung können auch andere anisotrope Medien betrachtet werden. Die numerische Behandlung der Wellenausbreitung in plasmagefüllten Resonatoren, in der Ionosphäre oder auch in Kristallen bietet weitere Möglichkeiten zur Anwendung des Gleichungssystems (7).

6 Literaturangaben

- Davies, J.B.; Muilwyk, C.A.: Numerical solution of uniform hollow waveguides with boundaries of arbitrary shape. Proc. IEE 113, S. 277-284, 1966.
- Hogan, C.L.: The ferromagnetic Faraday effect at microwave frequencies and its applications. The Bell System Technical Journal 31, S. 1-31, 1952.
- Kark, K.W.: Konvergenz und Wichtung von Orthogonalreihen bei Beugungsproblemen. Erscheint in Frequenz 51, 1997.
- Kost, A.: Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder. Springer, Berlin, 1994.
- Lange, F.J.K.: Wellen in Rechteckhohlleitern mit Ferriteinsatz und in geschirmten Schlitz- und Streifenleitungen auf Ferritsubstrat. Dissertation D17, Technische Hochschule Darmstadt, 1983.
- Navarro, E.A.; Such, V.: Study of TE und TM modes in waveguides of arbitrary cross-section. IEE Proceedings-H 139, S. 491-494, 1992.
- Ohm, E.A.: A broad-band microwave circulator. IRE Transactions on MTT 4, S. 210-217, 1956.
- Polder, D.: On the theory of ferromagnetic resonance. Phil. Mag. 40, S. 99-115, 1949.
- Schneemann, J.: Grundlagen der Differenzenmethode und der Methode finiter Elemente zur Lösung der Wellengleichung bei homogenen Hohlleitern. Diplomarbeit am Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik der Technischen Hochschule Darmstadt, 1970.
- Schwarz, H.R.: Methode der finiten Elemente. Teubner, Stuttgart, 1991.
- Severin, H.K.F.: Propagation constants of circular cylindrical waveguides containing ferrites. IRE Transactions on MTT 7, S. 337-346, 1959.
- Silvester, P.P.; Ferrari, R.L.: Finite elements for electrical engineers. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- Törnig, W.: Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Springer, Berlin, 1979.
- Weiland, T.: Eine numerische Methode zur Lösung des Eigenwellenproblems längshomogener Wellenleiter. A.E.Ü. 31, S. 308-314, 1977.
- Wolff, I.: Felder und Wellen in gyrotropen Mikrowellenstrukturen. Vieweg, Braunschweig, 1973.