

Theoretische Untersuchungen zur bistatischen Streuung an einer kreisförmigen Kante

K.W. Kark

DFVLR, Institut für Hochfrequenztechnik
D-8031 Oberpfaffenhofen

Zusammenfassung Es wird das Radarproblem der bistatischen Streuung ebener elektromagnetischer Wellen am halbumendlichen Kreiszyylinder betrachtet. Mit Hilfe der geometrischen Beugungstheorie (GTD) werden elektrische und magnetische äquivalente Linienströme entlang der kreisförmigen Aperturkante bestimmt. Die Kreisstromverteilung wird näherungsweise als äquivalenter Ersatz für die Aperturkante des Zylinders angesehen, deren Abstrahlungsverhalten man über eine Integraldarstellung der Feldgleichungen erhält. Für die Beugungsintegrale konnten neue bistatische Näherungslösungen gefunden werden, deren hohe Genauigkeit im Vergleich mit einer numerischen Gauß-Quadratur bestätigt wurde. Dreidimensionale Richtdiagramme geben das polarisationsabhängige Streuverhalten durch eine Darstellung der räumlichen Verteilung der radialen Energiestromdichte anschaulich wieder. Der monostatische Grenzfall wird ebenfalls untersucht und die Übereinstimmung mit früheren Rechnungen gezeigt.

Abstract An efficient analysis is presented for calculating the far zone fields scattered by a perfectly-conducting, open-ended, semi-infinite circular waveguide which is excited by an external electromagnetic plane wave. The geometrical theory of diffraction (GTD) is employed to derive electric and magnetic equivalent line currents along the circular edge of the aperture of the waveguide. The line current distribution is approximately taken as an equivalent for the circular edge, bounding the aperture of the cylinder. The radiation behaviour of the calculated line currents is found via an integral representation of the field equations. For the bistatic diffraction integrals new approximate solutions could be found. Their high accuracy were proved by comparison with a numerical Gauss-quadrature procedure. Three-dimensional directional patterns show the polarization dependent scattering characteristics via a representation of the spatial distribution of the radial energy-flux density. The monostatic limiting case is also investigated; the corresponding results completely agree with older computations.

1. Einleitung

In dieser Arbeit wird das Radarproblem der bistatischen Streuung ebener elektromagnetischer Wellen am halbumendlichen Kreiszyylinder betrachtet. Dabei wird speziell die Beugung an der kreisförmigen Aperturkante näherungsweise untersucht. Kreisförmige Strukturen, wie sie bei Reflektorantennen, Triebwerkseinläufen und Satellitenkörpern vorkommen, stellen wichtige Grundbausteine zur Analyse komplizierter Körper mittels der geometrischen Beugungstheorie dar. Bisherige strahlenoptische Untersuchungen befaßten sich lediglich mit dem monostatischen Rückstreuverhalten einer kreisförmigen Aperturkante (siehe z.B. Pathak et al [10]). In dieser Arbeit werden erstmals analyti-

sche Näherungsausdrücke für die Beugungsintegrale, die bei der bistatischen Streuung auftreten, angegeben. Die Integrale werden mit Hilfe der Methode der äquivalenten Kantenströme hergeleitet. Dazu wird die strahlenoptische Näherung der geometrischen Beugungstheorie verwendet. In dieser Weise erhält man eine sehr kompakte Darstellung des Streufeldes, die für eine numerische Auswertung deutlich der exakten Lösung des Beugungsproblems, die man mit Hilfe der Wiener-Hopf-Methode (Johnson und Moffatt [4]) gewinnen kann, überlegen ist.

2. Die einfallende Welle

Es wird das Radarproblem der bistatischen Streuung ebener elektromagnetischer Wellen am halbumendlichen Kreiszyylinder betrachtet. Die Einfallrichtung der ebenen Welle sei auf einen meridionalen Bereich $0^\circ \leq \vartheta_i \leq 70^\circ$ beschränkt; ebenso werden nur Raumrichtungen der gestreuten Wellen betrachtet, die im gleichen Intervall $0^\circ \leq \vartheta_s \leq 70^\circ$ liegen. Es erscheint plausibel, daß für die bistatische Streuung bei dieser räumlichen Anordnung von Sender und Empfänger die Oberflächenströme auf dem äußeren und inneren Zylindermantel vernachlässigt werden können. Den dominierenden Streubeitrag liefert die Beugung an der kreisförmigen Aperturkante (Bild 1).

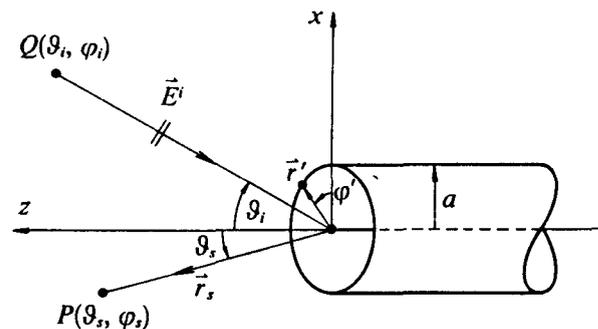


Bild 1. Bistatischer Streuprozess am halbumendlichen Kreiszyylinder: Quelle Q und Aufpunkt P befinden sich jeweils im Fernfeld der kreisförmigen Aperturkante. Der zulässige Raumwinkelbereich der nachfolgenden Näherungsrechnung wird etwa durch $0^\circ \leq \vartheta_i, \vartheta_s \leq 70^\circ$ beschrieben.

Im Mittelpunkt der kreisförmigen Apertur definiert man ein sphärisches Koordinatensystem, in dem die einfallende ebene Welle und das Streufeld beschrieben werden. Zur Darstellung der einfallenden Welle an einem beliebigen Punkt $P(\vec{r})$ macht man

mit dem Wellenvektor¹⁾ $\vec{k}_i = -k_0 \hat{r}_i$ bei harmonischer Zeitabhängigkeit ($e^{j\omega t}$) folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned}\vec{E}^i &= \left(A_\vartheta^i \hat{\vartheta}_i + A_\varphi^i \hat{\varphi}_i \right) e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \\ \vec{H}^i &= Y_0 \vec{E}^i \times \hat{r}_i.\end{aligned}\quad (1)$$

Dabei ist $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ die Wellenzahl und $Z_0 = 1/Y_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ der Feldwellenwiderstand des freien Raums. A_ϑ^i und A_φ^i sind komplexe Phasoren; durch sie wird die Polarisation der einfallenden ebenen Welle bestimmt. Mit $\vec{r} = r \hat{r}$ erhält man für den Ausbreitungsterm in Gl. (1):

$$e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} = e^{jk_0 r \hat{r}_i \cdot \hat{r}},$$

wobei gilt:

$$\hat{r}_i \cdot \hat{r} = \sin \vartheta_i \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi_i) + \cos \vartheta_i \cos \vartheta. \quad (2)$$

Im folgenden betrachtet man o.B.d.A. nur den azimutalen Inzidenzwinkel $\varphi_i = 0^\circ$, da die Streuanordnung rotationssymmetrisch zur z-Achse ist. Die Einfallsebene, die vom Wellenvektor $\vec{k}_i = -k_0 \hat{r}_i$ und der z-Achse aufgespannt wird, ist also mit der x-z-Ebene (Bild 1) identisch. Im Spezialfall $\varphi_i = 0^\circ$ erhält man z.B. für $A_\vartheta^i = 0$ eine horizontal polarisierte einfallende ebene Welle (H); für $A_\varphi^i = 0$ liegt vertikale Polarisation vor (V). Rechts- bzw. linksdrehende zirkulare Polarisation (RHIC bzw. LHIC) werden so definiert, daß der elektrische Feldvektor an einem festen Ort als Funktion der Zeit im Uhrzeigersinn bzw. im Gegenurzeigersinn rotiert, wenn der Beobachter in Ausbreitungsrichtung blickt.

3. Herleitung der Beugungsintegrale

Strahlenoptische Lösungsmethoden eignen sich nicht zur Berechnung von Feldern in der Nähe von und auf Kaustiken wie sie bei kreisförmigen Kanten auftreten. Eine Kaustik ist eine Brennlinie; durch jeden ihrer Punkte gehen gemäß den Prinzipien der geometrischen Beugungstheorie unendlich viele Strahlen. Ihr Aufeinandertreffen führt zu einer unphysikalischen Singularität und zum Versagen der Methode. Bei senkrechter Inzidenz ($\vartheta_i = 0^\circ$) ist z.B. die gesamte z-Achse des Kreiszyllinders eine Brennlinie. Im allgemeinen kann man jedoch mittels Integraldarstellungen die Felder in diesen Bereichen berechnen. Hierzu werden äquivalente elektrische und magnetische Linienströme (I_e und I_m) eingeführt, die entlang der beugenden Kante fließen (Knott und Senior [6]). Die Ströme werden als äquivalenter Ersatz für die streuende Kante betrachtet. Ihr Abstrahlungsverhalten im freien Raum, also nach Wegnahme des Zylinders, wird im folgenden untersucht. Dazu geht man aus

von den Maxwellgleichungen für harmonische Zeitabhängigkeit ($e^{j\omega t}$) und homogene isotrope Gebiete:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= j\omega \epsilon_0 \vec{E} + \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} &= -j\omega \mu_0 \vec{H} - \vec{M}.\end{aligned}\quad (3)$$

\vec{J} und \vec{M} kennzeichnen die Überlagerung von eingepprägten und induzierten elektrischen bzw. magnetischen Volumenstromdichten mit der Einheit A/m^2 bzw. V/m^2 . Sie stellen die Quellen des einfallenden und des gestreuten Feldes dar:

$$\vec{J} = \vec{J}_e + \vec{J}_i, \quad \vec{M} = \vec{M}_e + \vec{M}_i.$$

Im vorliegenden Streuproblem können die Quellenstromdichten \vec{J}_i und \vec{M}_i als auf der kreisförmigen Aperturkante des Rundhohlleiters induzierte Linienströme I_e und I_m ausgedrückt werden. Ihre Darstellung in Kugelkoordinaten lautet am Ort $\vec{r}' = a \hat{\rho}' = a(\hat{x} \cos \varphi' + \hat{y} \sin \varphi')$ auf dem Kreisring:

$$\begin{aligned}\vec{J}_i(\vec{r}') &= I_e(\varphi') \frac{1}{r'} \delta(r' - a) \delta(\vartheta' - \frac{\pi}{2}) \hat{\varphi}' \\ \vec{M}_i(\vec{r}') &= I_m(\varphi') \frac{1}{r'} \delta(r' - a) \delta(\vartheta' - \frac{\pi}{2}) \hat{\varphi}'.\end{aligned}\quad (4)$$

Mit δ wird hier die Diracsche Deltafunktion bezeichnet. Näherungswerte für die Linienströme I_e und I_m werden im Abschnitt 3.2 noch angegeben.

Das Gesamtfeld ergibt sich aus der Überlagerung von einfallender Welle (incident) und Streufeld:

$$\vec{E} = \vec{E}^i + \vec{E}^s, \quad \vec{H} = \vec{H}^i + \vec{H}^s.$$

Die einfallende ebene Welle ist in Gl. (1) dargestellt. Das Differentialgleichungssystem (3) kann in Integralform übergeführt werden (siehe z.B. Schroth und Stein [13]); man erhält somit für den Streufeldanteil in der Fraunhofer-Fernfeldzone:

$$\begin{aligned}\vec{E}^s(\vec{r}_s) &= jk_0 a \frac{e^{-jk_0 r_s}}{4\pi r_s} \int_0^{2\pi} \left[Z_0 \hat{r}_s \times (\hat{r}_s \times \hat{\varphi}') I_e(\varphi') + \right. \\ &\quad \left. + \hat{r}_s \times \hat{\varphi}' I_m(\varphi') \right] e^{jk_0 \hat{r}_s \cdot \vec{r}'} d\varphi'\end{aligned}\quad (5)$$

$$\vec{H}^s(\vec{r}_s) = Y_0 \hat{r}_s \times \vec{E}^s(\vec{r}_s). \quad (6)$$

Die Volumenströme \vec{J}_i und \vec{M}_i wurden hier bereits aus Gl. (4) eingesetzt. Zur Verdeutlichung des Integrationsweges und der gegenseitigen räumlichen Lage von Integrationspunkt und Aufpunkt P wird auf Bild 2 verwiesen. Es wurden die üblichen Fernfeldnäherungen

$$k_0 R_s \gg 1, \quad r_s \gg r' = a$$

¹⁾ In dieser Arbeit werden Ortsvektoren mit einem Pfeil ($\vec{}$) und Einheitsvektoren mit einem Dach ($\hat{}$) gekennzeichnet.

benutzt. R_s ist der Abstand zwischen Beugungspunkt auf der Aperturkante und Aufpunkt (Silver [15]):

$$R_s \approx r_s - \hat{r}_s \cdot \vec{r}' = r_s - a \sin \vartheta_s \cos (\varphi' - \varphi_s) . \quad (7)$$

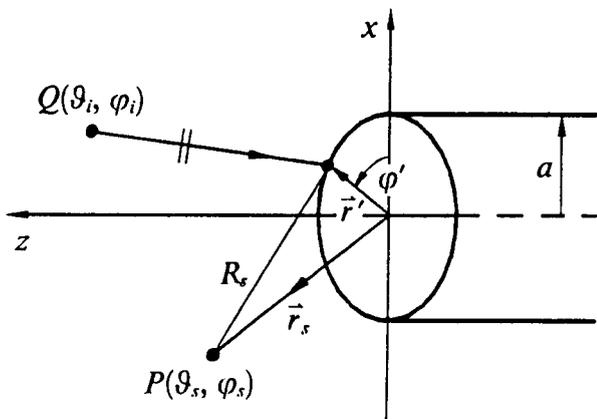


Bild 2. Zum Integrationsweg: Der Beugungspunkt am Ort $\vec{r}' = a \hat{\rho}'$ ist Teil des Integrationsweges entlang des Kreisrings. Die Fraunhofer-Näherung für R_s findet man in Gl. (7).

Für die nachfolgende Herleitung der Kantenströme I_e und I_m werden zunächst noch einige Begriffe aus der geometrischen Beugungstheorie zur Beugung an der Halbebene benötigt und im folgenden bereitgestellt.

3.1 Das Kantenbeugungsgesetz

Betrachtet man einen Beugungspunkt auf der kreisförmigen Kante des Halbzylinders, so kann man die gekrümmte Kante lokal durch eine Halbebene approximieren. Das vektorielle Randwertproblem der Beugung an der unendlich dünnen und elektrisch ideal leitenden Halbebene kann streng und in geschlossener Form gelöst werden (Sommerfeld [16]). Man kann auch mit Hilfe strahlenoptischer Lösungsmethoden (z.B. geometrische Beugungstheorie: *geometrical theory of diffraction - GTD*, siehe Kouyoumjian et al [9]) das kantengebeugte Feld näherungsweise errechnen. Der Zusammenhang zwischen einfallendem und gebeugtem Strahl wird mittels eines Kantenbeugungskoeffizienten beschrieben, der von Frequenz, Polarisation, Einfalls- und Ausfallsrichtung abhängt. Die lokalen Kantenwinkel des einfallenden (β_i, ψ_i) und des gebeugten Strahls (β_s, ψ_s) (siehe Bild 3) können mittels einfacher trigonometrischer Beziehungen über die globale Einfalls- und Streurichtung ($\vartheta_i, \varphi_i; \vartheta_s, \varphi_s$) (siehe Bild 1 und Bild 2) ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \cos \beta_i &= \sin \vartheta_i \sin (\varphi_i - \varphi') \\ \cos \psi_i \sin \beta_i &= -\cos \vartheta_i \\ \sin \psi_i \sin \beta_i &= -\sin \vartheta_i \cos (\varphi_i - \varphi') \end{aligned} \quad (8)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \cos \beta_s &= -\sin \vartheta_s \sin (\varphi_s' - \varphi') \\ \cos \psi_s \sin \beta_s &= -\cos \vartheta_s \\ \sin \psi_s \sin \beta_s &= -\sin \vartheta_s \cos (\varphi_s - \varphi') . \end{aligned} \quad (9)$$

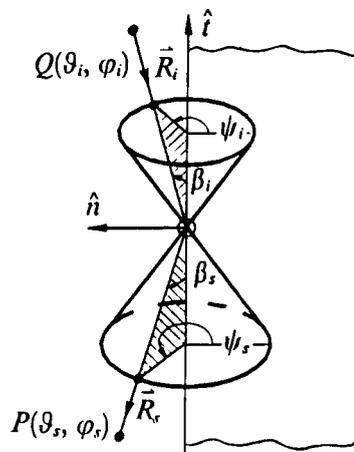


Bild 3. Zum kantenbezogenen Koordinatensystem: Die Winkel $\beta_{i,s}$ und $\psi_{i,s}$ für einfallenden und gebeugten Strahl werden relativ zur Tangenten t bzw. zur Normalen \hat{n} der Halbebene definiert. Die Schraffur soll Einfalls- und Ausfallsebene darstellen.

Es gilt stets $0 \leq \beta_{i,s} \leq \pi$ und $0 \leq \psi_{i,s} \leq 2\pi$. Das Kantenbeugungsgesetz, das auf dem erweiterten Fermatschen Prinzip (Keller [5]) beruht, lautet:

$$\beta_s = \beta_i .$$

Jeder auf die Kante auftreffende Strahl regt daher einen Kegel gebeugter Strahlen an (Kellerscher Beugungkegel). Bei senkrechter Inzidenz ($\vartheta_i = 0^\circ \rightarrow \beta_i = \pi/2$) entartet der Kegel zu einer Kreisscheibe. Das Beugungsfeld kann daher nur in gewissen Raumrichtungen bestimmt werden.

Die GTD-Kantenbeugungskoeffizienten für die Halbebene werden wie folgt definiert:

$$D_{e,m} = -\frac{e^{-j\pi/4} \sqrt{\lambda_0}}{4\pi \sqrt{\sin \beta_i \sin \beta_s}} \times \left[\frac{1}{\cos \frac{\psi_i - \psi_s}{2}} \mp \frac{1}{\cos \frac{\psi_i + \psi_s}{2}} \right] . \quad (10)$$

Das $-$ Zeichen ist für den elektrischen Fall (D_e) und das $+$ Zeichen für den magnetischen Fall (D_m) zuständig. Die Wellenlänge $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ kann über die Wellenzahl ausgedrückt werden. Für $\beta_s = \beta_i$ gibt Gl. (10) die gewöhnlichen GTD-Kantenbeugungskoeffizienten wieder. Ein heuristisches Vorgehen erlaubt die näherungsweise Verwendung desselben Ausdrucks auch für Beugungsrichtungen, die nicht auf dem Beugungkegel liegen ($\beta_s \neq \beta_i$). Die Symmetrie des Wurzelterms in Gl. (10) stellt auch weiterhin die Reziprozität bei Vertauschen von einfallendem und gebeugtem Strahl sicher und hat sich bei numerischen Vergleichen bewährt

(Knott und Senior [7]). Für spätere Zwecke werden hier noch die stets reellen modifizierten Beugungsfaktoren

$$\delta_{e,m} = k_0 a e^{j\pi/4} \frac{D_{e,m} / \sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{\sin \beta_i \sin \beta_s}} \quad (11)$$

definiert. An den Nullstellen der cos-Funktionen in Gl. (10) werden die GTD-Beugungskoeffizienten singularär. Die Singularitäten liegen genau an den lokalen Schatten- und Reflexionsgrenzen der einfallenden Welle relativ zur beugenden Kante. Beim Überschreiten dieser Grenzen verschwindet plötzlich der direkte bzw. reflektierte Strahl. Die Lage der Schattengrenze (*incident shadow boundary - ISB*) bzw. der Reflexionsgrenze (*reflection shadow boundary - RSB*) kann man durch die lokalen Kantenwinkel (siehe Bild 3) beschreiben:

$$\psi_s^{ISB} = \pi + \psi_i, \quad \psi_s^{RSB} = \pi - \psi_i \quad (12)$$

Die genannten Singularitäten und die sie umgebenden Übergangszonen sind die Ursache dafür, daß man sich auf einen globalen Winkelbereich von etwa $0^\circ \leq \vartheta_i, \vartheta_s \leq 70^\circ$ beschränken muß. Man kann die geometrische Beugungstheorie um höhere Terme erweitern, was auf neue Beugungskoeffizienten führt, aus denen man Felder ableitet, die sich beim Durchgang durch Schatten- und Reflexionsgrenzen stetig verhalten. Diese *uniform geometrical theory of diffraction - UTD* (Kouyoumjian und Pathak [8]) besitzt allerdings ebenso wie die GTD noch den gleichen Nachteil, daß die Felddarstellung an Kaustiken singularär wird. Mit Hilfe einer Integraldarstellung der Felder kann man nach Einführung äquivalenter Kantenströme auf der kreisförmigen Aperturkante jedoch auch in Kaustikbereichen Näherungen für die Felder erhalten.

3.2 Äquivalente Kantenströme

Um das Kaustikproblem von GTD und UTD zu vermeiden, benutzt man zur Feldberechnung in Kaustikbereichen die Methode der äquivalenten Kantenströme (*equivalent current method - ECM*, siehe z.B. Pathak [12]). Dazu benötigt man eine Integraldarstellung der Felder, wie sie bereits in den Gln. (5) und (6) bereitgestellt wurde. Mit der ECM-Methode kann man natürlich auch außerhalb von Kaustikbereichen das Streufeld bestimmen; die dort berechneten Werte stimmen asymptotisch mit den Feldwerten überein, die in diesem Bereich auch mit Hilfe der geometrischen Beugungstheorie (GTD) berechnet werden können.

Die äquivalenten Kantenströme werden aus dem einfallenden Feld mittels der GTD-Beugungskoeffizienten für die Halbebene (siehe Gl. (10)) bestimmt. Das ist möglich, weil sich die Kante weit entfernt von Kaustikbereichen befindet. Die so bestimmten Linienströme stellen keine physikalischen Ströme dar; es ist daher nicht möglich, aus

ihnen das Streufeld für alle Raumrichtungen zu bestimmen. Die heuristische Erweiterung des Gültigkeitsbereichs der GTD-Beugungskoeffizienten auf Raumrichtungen, die nicht auf dem Beugungskegel (siehe Bild 3) liegen, erlaubt eine näherungsweise Feldberechnung im gesamten interessierenden meridionalen Winkelbereich $0^\circ \leq \vartheta_i, \vartheta_s \leq 70^\circ$. Die berechneten ECM-Feldwerte weisen an Schatten- und Reflexionsgrenzen (ISB, RSB, siehe Gl. (12)) die gleichen Singularitäten auf, wie sie auch von einer GTD-Rechnung erzeugt werden.

Die äquivalenten Kantenströme erhält man aus dem relativ zur Kante lokal tangentialen einfallenden Feld mit Hilfe der GTD-Kantenbeugungskoeffizienten für die Halbebene (Pathak et al [11]):

$$I_e(\varphi') = -2Y_0 e^{-j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\lambda_0} \frac{D_e(\beta_i, \psi_i; \beta_s, \psi_s)}{\sqrt{\sin \beta_i \sin \beta_s}} (\vec{E}^i \cdot \hat{\varphi}') \quad (13)$$

$$I_m(\varphi') = -2Z_0 e^{-j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\lambda_0} \frac{D_m(\beta_i, \psi_i; \beta_s, \psi_s)}{\sqrt{\sin \beta_i \sin \beta_s}} (\vec{H}^i \cdot \hat{\varphi}')$$

Das einfallende Feld findet man in Gl. (1) und die Beugungskoeffizienten sind in Gl. (10) angegeben. Man sieht sofort, daß die äquivalenten Kantenströme keine wahren physikalischen Ströme sein können, da ihr Wert von der Beobachterichtung ($\vartheta_s, \varphi_s \rightarrow \beta_s, \psi_s$, siehe Gl. (9)) abhängt. Analog zu den GTD-Kantenbeugungskoeffizienten aus Gl. (10) wurde auch hier die Stromdarstellung für Raumrichtungen, die nicht auf dem Kellerschen Beugungskegel liegen ($\beta_i \neq \beta_i$), heuristisch erweitert.

Die tangentialen Feldstärken am Ort des Kreisrings $\vec{r}' = a \hat{r}' = a(\hat{x} \cos \varphi' + \hat{y} \sin \varphi')$, die zur Auswertung von Gl. (13) benötigt werden, erhält man aus:

$$\vec{E}^i \cdot \hat{\varphi}' = \left[-A_\vartheta^i \cos \vartheta_i \sin(\varphi' - \varphi_i) + A_\varphi^i \cos(\varphi' - \varphi_i) \right] e^{jk_0 a \hat{r}_i \cdot \hat{r}'} \quad (14)$$

$$\vec{H}^i \cdot \hat{\varphi}' = -Y_0 \left[A_\vartheta^i \cos \vartheta_i \sin(\varphi' - \varphi_i) + A_\varphi^i \cos(\varphi' - \varphi_i) \right] e^{jk_0 a \hat{r}_i \cdot \hat{r}'}, \quad (15)$$

wobei die Polarisation durch die komplexen Phasoren A_ϑ^i und A_φ^i bestimmt wird. Aus Gl. (2) folgt mit $\vartheta = \vartheta' = \pi/2$ und $\varphi = \varphi'$:

$$\hat{r}_i \cdot \hat{r}' = \sin \vartheta_i \cos(\varphi' - \varphi_i) \quad (16)$$

Aus den Integraldarstellungen (5) und (6) kann man mit Hilfe der Gln. (13) bis (15) die elektrischen und magnetischen Feldkomponenten des Streufelds in $\hat{\vartheta}_s$ - und $\hat{\varphi}_s$ -Richtung gewinnen:

$$E_{\vartheta}^s(\vec{r}_s) = f(r_s) \left[I_e^{ss} A_{\varphi}^i \cos \vartheta_l \cos \vartheta_s - I_e^{cs} A_{\varphi}^i \cos \vartheta_s - I_m^{sc} A_{\varphi}^i \cos \vartheta_l - I_m^{cc} A_{\varphi}^i \right] \quad (17)$$

$$H_{\varphi}^s(\vec{r}_s) = Y_0 E_{\vartheta}^s(\vec{r}_s)$$

$$E_{\varphi}^s(\vec{r}_s) = f(r_s) \left[-I_m^{ss} A_{\varphi}^i \cos \vartheta_l \cos \vartheta_s - I_m^{cs} A_{\varphi}^i \cos \vartheta_s - I_e^{sc} A_{\varphi}^i \cos \vartheta_l + I_e^{cc} A_{\varphi}^i \right] \quad (18)$$

$$H_{\vartheta}^s(\vec{r}_s) = -Y_0 E_{\varphi}^s(\vec{r}_s)$$

Der Radialterm der gestreuten, als eben betrachteten Fernfeldwelle ist dabei:

$$f(r_s) = \frac{1}{k_0 r_s} e^{-j k_0 r_s}$$

Die acht auftretenden Beugungsintegrale $I_{e,m}^{s,c,s,c}$ haben die allgemeine Form:

$$I(k_0 a; \vartheta_l, \varphi_l; \vartheta_s, \varphi_s) = \int_0^{2\pi} h(\varphi') e^{j k_0 a g(\varphi')} d\varphi' \quad (19)$$

wobei gilt (siehe die Gln. (7) und (16)):

$$g(\varphi') = (\hat{r}_l + \hat{r}_s) \cdot \hat{r}' = \sin \vartheta_l \cos(\varphi' - \varphi_l) + \sin \vartheta_s \cos(\varphi' - \varphi_s) \quad (20)$$

ihre nachfolgende Berechnung stellt einen wesentlichen Anteil dieser Arbeit dar. Die Beugungsfunktionen $h(\varphi')$ können acht verschiedene Formen annehmen. Die Indizierung mit e und m bzw. s und c korrespondiert mit den Indices der Beugungsintegrale aus den Gln. (17) und (18).

$$h_{e,m}^{ss}(\varphi') = \delta_{e,m}(\varphi') \sin(\varphi' - \varphi_l) \sin(\varphi' - \varphi_s)$$

$$h_{e,m}^{cs}(\varphi') = \delta_{e,m}(\varphi') \cos(\varphi' - \varphi_l) \sin(\varphi' - \varphi_s)$$

$$h_{e,m}^{sc}(\varphi') = \delta_{e,m}(\varphi') \sin(\varphi' - \varphi_l) \cos(\varphi' - \varphi_s)$$

$$h_{e,m}^{cc}(\varphi') = \delta_{e,m}(\varphi') \cos(\varphi' - \varphi_l) \cos(\varphi' - \varphi_s)$$

Aus praktischen Gründen verwendet man folgende Aufspaltung der Beugungsfunktionen:

$$h(\varphi') = \delta_{e,m}(\varphi') T(\varphi') \quad (21)$$

mit den trigonometrischen Produkten

$$T(\varphi') = \left\{ \begin{array}{l} \sin(\varphi' - \varphi_l) \\ \cos(\varphi' - \varphi_l) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \sin(\varphi' - \varphi_s) \\ \cos(\varphi' - \varphi_s) \end{array} \right\}$$

Aufgrund der komplizierten Abhängigkeit der modifizierten Beugungsfaktoren $\delta_{e,m}$ von der Integrationsvariablen φ' können die acht Beugungsintegrale I aus Gl. (19) nicht mehr geschlossen berechnet werden. Im nächsten Kapitel wird darum gezeigt, wie man eine Näherungslösung der Integrale erhalten kann, die im gesamten interessierenden Aspektwinkelbereich $0^\circ \leq \vartheta_{l,s} \leq 70^\circ$ gültig ist.

4. Näherungslösung der Beugungsintegrale

Die Beugungsintegrale (19) können numerisch berechnet werden. Die hierzu benötigte Rechenzeit steigt aber bei größeren Hohlleiterradien ($k_0 a \gg 1$) wegen der schnelleren Oszillationen des Integranden beträchtlich an; günstiger ist es, eine analytische Näherungslösung zu konstruieren. Im Abschnitt 4.2 wird eine uniforme Integralauswertung vorgestellt, deren hohe Genauigkeit sich im Vergleich mit einer numerischen Quadratur bestätigt hat.

4.1 Methode der stationären Phase

Als Vorbereitung der nachfolgenden uniformen Integralauswertung soll kurz auf die Methode der stationären Phase (siehe z.B. James [3]) zur asymptotischen Berechnung von Integralen des Typs

$$I = \int_0^{2\pi} h(\varphi') e^{j k_0 a g(\varphi')} d\varphi' \quad (22)$$

die in der Beugungstheorie häufig auftreten, eingegangen werden. Ist die Bedingung $k_0 a \gg 1$ erfüllt, während $g(\varphi')$ sich in der Größenordnung von 1 bewege, so ist der Exponentialterm im Integranden eine über der Variablen φ' schnell oszillierende Funktion mit Ausnahme gewisser Bereiche um sogenannte stationäre Punkte erster Ordnung an φ_0' , die der Bedingung

$$g'(\varphi_0') = 0 \quad \text{mit} \quad g''(\varphi_0') \neq 0$$

genügen. Im hier vorliegenden Beugungsproblem mit der Funktion $g(\varphi')$ aus Gl. (20) errechnet man die stationären Punkte:

$$\varphi_0' = p\pi + \arctan \frac{\sin \vartheta_l \sin \varphi_l + \sin \vartheta_s \sin \varphi_s}{\sin \vartheta_l \cos \varphi_l + \sin \vartheta_s \cos \varphi_s} \quad (23)$$

Da gilt $\varphi_0' \in [0, 2\pi]$, und weil der Hauptwert der arctan-Funktion im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ liegt, so kommen nur die Werte $p = 0, 1$ bzw. $p = 1, 2$ in Betracht. Unter Erfüllung der Nebenbedingung $g''(\varphi_0') \neq 0$ gibt es auf der kreisförmigen Aperturkante daher stets genau zwei sich diametral gegenüber liegende stationäre Punkte. Im monostatischen Spezialfall ($\vartheta_l = \vartheta_s, \varphi_l = \varphi_s$) kann man aus Gl. (23) die beiden Werte

$$\varphi_{0,1}' = \varphi_l, \quad \varphi_{0,2}' = \varphi_l \pm \pi \quad (24)$$

errechnen. An diesen Kantenpunkten entartet der Kellersche Beugungskegel (siehe Bild 3) jeweils zu einer Kreisscheibe. Die stationären Punkte stellen lokale Streuzentren der Kreiskante dar, die für eine GTD-Strahlenkonstruktion als Kantenbeugungspunkte einfach gebogener Strahlen zu berücksichtigen sind.

Der Integralwert I wird, falls $h(\varphi')$ in der Umgebung von φ_0' nur schwach variiert, dominiert von den Bereichen $[\varphi_0' - \Delta\varphi^-, \varphi_0' + \Delta\varphi^+]$ um stationäre Punkte bestimmt, da sich die weiter entfernt liegenden Integrationsbeiträge weitgehend gegenseitig auslöschen:

$$I \approx \int_{\varphi_0' - \Delta\varphi^-}^{\varphi_0' + \Delta\varphi^+} h(\varphi') e^{j k_0 a g(\varphi')} d\varphi' \quad (25)$$

Über die Größe des Bereichs $\Delta\varphi^+ + \Delta\varphi^-$ soll hier keine Aussage gemacht werden. Der einfachste Fall liegt vor, wenn im gesamten Integrationsintervall (hier $[0, 2\pi]$) nur ein einziger stationärer Punkt vorhanden ist, und dieser sich auch genügend weit von den Integrationsgrenzen entfernt befindet. Liegen die Integrationsgrenzen nicht im Unendlichen, so liefern auch sie einen Beitrag; bei den Grenzen aus Gl. (22) und der 2π -Periodizität des Integranden, heben sich die Endpunktsbeiträge jedoch gegenseitig weg. Man erhält somit als asymptotische Integralapproximation nach der Methode der stationären Phase (Erdélyi [1]):

$$I \approx \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 a |g''(\varphi_0')|}} h(\varphi_0') e^{j(k_0 a g(\varphi_0') \pm \frac{\pi}{4})} \quad (26)$$

Das $+$ Zeichen gilt für $g''(\varphi_0') > 0$ und das $-$ Zeichen für $g''(\varphi_0') < 0$. Treten im Integrationsintervall mehrere stationäre Punkte $\varphi_{0,n}'$ auf mit $n = 1, 2, 3, \dots$, so kann das Integral als Summe über alle Teilbeiträge des Typs (26) dargestellt werden, falls alle stationären Punkte genügend weit voneinander bzw. von den Endpunkten entfernt liegen. Sind diese Voraussetzungen nicht erfüllt, so werden die Ausdrücke komplizierter (siehe z.B. *Felsen* und *Marcuvitz* [2]). Die Integralapproximation nach der Methode der stationären Phase liefert also für den Fall zweier hinreichend separierter stationärer Punkte an $\varphi_{0,1}'$ und $\varphi_{0,2}' = \varphi_{0,1}' \pm \pi$ (siehe Gl. (23)):

$$I \approx \sum_{n=1}^2 I_n$$

mit den beiden Teilintegrationsbeiträgen ($n = 1, 2$)

$$I_n = \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 a |g''(\varphi_{0,n}')|}} h(\varphi_{0,n}') e^{j(k_0 a g(\varphi_{0,n}') \pm \frac{\pi}{4})}$$

Mit Hilfe der leicht nachprüfbaren Beziehungen

$$\begin{aligned} g(\varphi_{0,2}') &= -g(\varphi_{0,1}') \\ \delta_{e,m}(\varphi_{0,2}') &= \delta_{e,m}(\varphi_{0,1}') \\ h(\varphi_{0,2}') &= h(\varphi_{0,1}') \end{aligned} \quad (27)$$

findet man den konjugiert komplexen Zusammenhang $I_2 = I_1^*$ und erhält als Gesamtintegralapproximation:

$$\begin{aligned} I &\approx 2 \operatorname{Re} \{I_1\} = \\ &= \sqrt{\frac{8\pi}{k_0 a |g''(\varphi_{0,1}')|}} h(\varphi_{0,1}') \cos(k_0 a g(\varphi_{0,1}') \pm \frac{\pi}{4}); \end{aligned}$$

die Funktion $h(\varphi_{0,1}')$ nimmt in dieser Arbeit stets nur reelle Werte an. Ist die Bedingung $g''(\varphi_0') \neq 0$ nicht erfüllt, so hat man es im hier betrachteten Beugungsproblem mit einer Kaustikrichtung zu tun, und die Methode der stationären Phase ist in der geschilderten Form nicht mehr anwendbar. Um Kaustikprobleme zu vermeiden, wird im nächsten Abschnitt zur uniformen Darstellung der Beugungsintegrale eine andere asymptotische Integralauswertung bevorzugt, die in Teilen auf die Methode der stationären Phase zurückgreift aber im gesamten interessierenden Bereich $0^\circ \leq \vartheta_{i,r} \leq 70^\circ$ anwendbar bleibt.

4.2 Uniforme Auswertung

Im folgenden werden die acht auftretenden Beugungsintegrale des Typs

$$\begin{aligned} I_{e,m}^{s,c;s,c} &= \int_0^{2\pi} \delta_{e,m}(\varphi') \left\{ \begin{array}{l} \sin(\varphi' - \varphi_i) \\ \cos(\varphi' - \varphi_i) \end{array} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \begin{array}{l} \sin(\varphi' - \varphi_s) \\ \cos(\varphi' - \varphi_s) \end{array} \right\} e^{j k_0 a g(\varphi')} d\varphi' \end{aligned} \quad (28)$$

näher betrachtet. Beschränkt man sich zunächst auf den monostatischen Spezialfall bei senkrechter Inzidenz ($\vartheta_i = \vartheta_s = 0^\circ$, $\varphi_i = \varphi_s$), so kann man die Integrale noch geschlossen berechnen. Man befindet sich hier direkt auf der axialen Kaustik der Anordnung. Aus den Gln. (8) und (9) folgen dann für alle Punkte der Kreiskante die lokalen Kantenwinkel $\beta_i = \beta_s = \pi/2$ und $\psi_i = \psi_s = \pi$, womit Gl. (11) schließlich die modifizierten Beugungsfaktoren

$$\delta_e = -\frac{k_0 a}{2\pi}, \quad \delta_m = 0 \quad (29)$$

für $\vartheta_i = \vartheta_s = 0^\circ$ und $\varphi_i = \varphi_s$ liefert. Es verschwindet somit der magnetische Beugungskoeffizient D_m und nach Gl. (13) wird daher bei senkrechter Inzidenz im monostatischen Fall nur ein elektrischer Linienstrom, aber kein magnetischer, in der kreisförmigen Aperturkante induziert. Mit der Phasenfunktion $g(\varphi') = 0$ (siehe Gl. (20) für $\vartheta_i = \vartheta_s = 0^\circ$) reduzieren sich die Beugungsintegrale (28) auf einfache trigonometrische Quadraturen. Man erhält im einzelnen die exakten Integralwerte:

$$I_e^{ss} = I_e^{cc} = \pi \delta_e = -\frac{k_0 a}{2} \quad (30)$$

für $\vartheta_i = \vartheta_s = 0^\circ$ und $\varphi_i = \varphi_s$; während die anderen Integrale I_e^{sc} , I_e^{cs} , I_m^{sc} , I_m^{cs} , I_m^{cc} und I_m^{ss} alle den Wert 0 annehmen. Bei anderen Aspektwinkeln $\vartheta_{i,r} \neq 0^\circ$ ist man auf Näherungsrechnungen angewiesen.

4.2.1 Rückführung auf Sommerfeldintegrale

Die Idee zur asymptotischen Darstellung der Beugungsintegrale geht auf *Pathak et al* [10] zurück, die den monostatischen Spezialfall der Radarrückstreuung am halbbunendlichen Kreiszyylinder betrachteten. Hier soll das dort verwendete Verfahren auf den bistatischen Streuprozess erweitert werden.

Für Einfall- und Streurichtungen *innerhalb* des Kaustikbereichs $\vartheta_{i,s} \approx 0^\circ$ sind die modifizierten Beugungsfaktoren $\delta_{e,m}$ schwach veränderliche Funktionen. Sie nehmen also Werte an, die sich nur gering von den Grenzwerten aus Gl. (29) unterscheiden und auch nur schwach von der Integrationsvariablen φ' abhängen; man kann hier deshalb mit Gl. (21) zur genäherten Berechnung der Integrale (28) ansetzen:

$$\Gamma_{e,m}^{s,c;s,c} \approx \left\{ \begin{array}{l} \delta_e \approx -\frac{k_0 a}{2\pi} \\ \delta_m \approx 0 \end{array} \right\} \cdot \int_0^{2\pi} T(\varphi') e^{j k_0 a g(\varphi')} d\varphi'. \quad (31)$$

Das verbleibende Integral wird später noch exakt berechnet. Zunächst wird das ursprüngliche Integral (28) noch für Raumrichtungen $\vartheta_{i,s}$ untersucht, die *außerhalb* des Kaustikbereichs liegen. Hier ist die oben geschilderte Methode der stationären Phase anwendbar und man erhält nach Gl. (25) näherungsweise:

$$\begin{aligned} \Gamma_{e,m}^{s,c;s,c} \approx & \int_{\varphi_{0,1}' - \Delta\varphi_1}^{\varphi_{0,1}' + \Delta\varphi_1} h(\varphi') e^{j k_0 a g(\varphi')} d\varphi' + \\ & + \int_{\varphi_{0,2}' - \Delta\varphi_2}^{\varphi_{0,2}' + \Delta\varphi_2} h(\varphi') e^{j k_0 a g(\varphi')} d\varphi'. \end{aligned} \quad (32)$$

Mit der Aufspaltung (21) kann man Gl. (32) näherungsweise umformen:

$$\begin{aligned} \Gamma_{e,m}^{s,c;s,c} \approx & \delta_{e,m}(\varphi_{0,1}') \int_{\varphi_{0,1}' - \Delta\varphi_1}^{\varphi_{0,1}' + \Delta\varphi_1} T(\varphi') e^{j k_0 a g(\varphi')} d\varphi' + \\ & + \delta_{e,m}(\varphi_{0,2}') \int_{\varphi_{0,2}' - \Delta\varphi_2}^{\varphi_{0,2}' + \Delta\varphi_2} T(\varphi') e^{j k_0 a g(\varphi')} d\varphi', \end{aligned}$$

da $\delta_{e,m}$ als schwach von φ' abhängende Funktionen vorausgesetzt sind. Nach Gl. (27) haben die modifizierten Beugungsfaktoren $\delta_{e,m}$ an beiden stationären Punkten den gleichen Wert und man kann die Teilintegrale wieder zusammenfassen:

$$\Gamma_{e,m}^{s,c;s,c} \approx \delta_{e,m}(\varphi_{0,1}') \int_0^{2\pi} T(\varphi') e^{j k_0 a g(\varphi')} d\varphi', \quad (33)$$

womit die Beugungsintegrale wieder auf das gleiche Restintegral wie in Gl. (31) zurückgeführt sind. Die allgemeinen Beugungsfaktoren $\delta_{e,m}(\varphi_{0,1}')$ erhält man mit dem stationären Punkt (23) aus der Darstellung (11).

Beim monostatischen Spezialfall mit *beliebigen* Werten $\vartheta_i = \vartheta_s$ aus $[0^\circ, 70^\circ]$ und $\varphi_i = \varphi_s$ gilt an beiden stationären Punkten (24) stets $\beta_i = \beta_s = \pi/2$ (siehe die Gln. (8) und (9)). Man findet dort sofort auch die Beziehung: $\cos \psi_{i,s} = -\cos \vartheta_{i,s}$, und Gl. (11) liefert schließlich die modifizierten Beugungsfaktoren für den *monostatischen* Fall:

$$\delta_{e,m}(\varphi_{0,1}') = -\frac{k_0 a}{4\pi} \left(1 \pm \frac{1}{\cos \vartheta_s} \right), \quad (34)$$

die auch schon von *Pathak et al* in [10] angegeben wurden. Es ist bemerkenswert, daß im Bereich $0^\circ \leq \vartheta_i = \vartheta_s \leq 35^\circ$ der Betrag des elektrischen Beugungsfaktors δ_e um mindestens einen Faktor 10 größer ist als der entsprechende Wert von $|\delta_m|$. Somit liefert hier der elektrische Kantenstrom gegenüber dem magnetischen den weitaus dominierenden Streuanteil. Bei axialer Inzidenz mit $\vartheta_i = \vartheta_s = 0^\circ$ gilt sogar $\delta_m = 0$ (siehe auch Gl. (29)).

Der Faktor $\delta_{e,m}(\varphi_{0,1}')$ reduziert sich für $\vartheta_{i,s} = 0^\circ$, also im Kaustikbereich, gerade wieder auf die Grenzwerte aus Gl. (29). Somit ist gezeigt, daß im monostatischen Spezialfall die Darstellung (33) der Beugungsintegrale sowohl *außerhalb* als auch *innerhalb* des Kaustikbereichs Gültigkeit besitzt. Man hat also eine einzige *uniforme* Felddarstellung, die im gesamten interessierenden Winkelbereich $0^\circ \leq \vartheta_{i,s} \leq 70^\circ$ anwendbar ist und auch an Kaustiken wohl definierte Ergebnisse liefert. Man setzt nun voraus, daß die Darstellung (33) ihre uniforme Gültigkeit auch im allgemeinen *bistatischen* Fall beibehält.

Zur nun noch ausstehenden exakten Berechnung des Restintegrals aus den Gln. (31) bzw. (33) stellt man die Phasenfunktion $g(\varphi')$ aus Gl. (20) in folgender äquivalenter Weise dar:

$$g(\varphi') = A \sin(\varphi' + \Phi)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\sin^2 \vartheta_i + \sin^2 \vartheta_s + 2 \sin \vartheta_i \sin \vartheta_s \cos \chi_0} \\ \tan \Phi &= \frac{\sin \vartheta_i \cos \varphi_i + \sin \vartheta_s \cos \varphi_s}{\sin \vartheta_i \sin \varphi_i + \sin \vartheta_s \sin \varphi_s} \\ \chi_0 &= \varphi_i - \varphi_s \end{aligned} \quad (35)$$

Damit kann man für die Beugungsintegrale (28) schreiben:

$$I_{e,m}^{s,c,s,c} \approx \delta_{e,m}(\varphi_0, 1') \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \sin(\varphi' - \varphi_l) \\ \cos(\varphi' - \varphi_l) \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} \sin(\varphi' - \varphi_s) \\ \cos(\varphi' - \varphi_s) \end{array} \right\} e^{jk_0 a A \sin(\varphi' + \Phi)} d\varphi'.$$

Man beachte den Zusammenhang zwischen Φ und den stationären Punkten φ_0' aus Gl. (23): $\tan \Phi = 1 / \tan \varphi_0'$. Nach elementarer Umformung der trigonometrischen Produkte kann man die acht Beugungsintegrale auf drei Grundtypen I_0 , I_c und I_s zurückführen:

$$\begin{aligned} I_{e,m}^{ss} &\approx \delta_{e,m}(\varphi_0, 1') \frac{1}{2} (I_0 \cos \chi_0 - I_c) \\ I_{e,m}^{sc} &\approx \delta_{e,m}(\varphi_0, 1') \frac{1}{2} (-I_0 \sin \chi_0 + I_s) \\ I_{e,m}^{cs} &\approx \delta_{e,m}(\varphi_0, 1') \frac{1}{2} (I_0 \sin \chi_0 + I_s) \\ I_{e,m}^{cc} &\approx \delta_{e,m}(\varphi_0, 1') \frac{1}{2} (I_0 \cos \chi_0 + I_c) . \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\alpha = k_0 a A \quad \text{und} \quad \tau = \varphi' + \Phi - \frac{\pi}{2}$$

lauten die noch zu bestimmenden Grundintegrale:

$$I_0 = \int_{\Phi - \frac{\pi}{2}}^{\Phi + \frac{3\pi}{2}} e^{j\alpha \cos \tau} d\tau$$

$$\begin{aligned} I_c &= -I_2^c \cos \chi_2 - I_2^s \sin \chi_2 \\ I_s &= I_2^c \sin \chi_2 - I_2^s \cos \chi_2 \end{aligned}$$

mit

$$\chi_2 = 2\Phi + \varphi_l + \varphi_s$$

und

$$I_2^{c,s} = \int_{\Phi - \frac{\pi}{2}}^{\Phi + \frac{3\pi}{2}} \left\{ \begin{array}{l} \cos 2\tau \\ \sin 2\tau \end{array} \right\} e^{j\alpha \cos \tau} d\tau .$$

Die verbleibenden Integrale I_0 , I_2^c und I_2^s werden als Sommerfeldintegrale bezeichnet; man kann sie in geschlossener Form durch gewöhnliche Besselfunktionen J_0 und J_2 ausdrücken (Weyrich [17]):

$$\begin{aligned} I_0 &= 2\pi J_0(\alpha) , & I_2^c &= -2\pi J_2(\alpha) \\ I_2^s &= 0 . \end{aligned}$$

Die gesuchten Näherungen für die Beugungsintegrale erhält man schließlich in übersichtlicher Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} I_{e,m}^{ss} \\ I_{e,m}^{sc} \\ I_{e,m}^{cs} \\ I_{e,m}^{cc} \end{bmatrix} \approx \pi \delta_{e,m}(\varphi_0, 1') \begin{bmatrix} \cos \chi_0 & -\cos \chi_2 \\ -\sin \chi_0 & -\sin \chi_2 \\ \sin \chi_0 & -\sin \chi_2 \\ \cos \chi_0 & \cos \chi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0(\alpha) \\ J_2(\alpha) \end{bmatrix} \quad (36)$$

mit $\chi_0 = \varphi_l - \varphi_s$ und $\chi_2 = 2\Phi + \varphi_l + \varphi_s$, Φ und A aus Gl. (35) sowie $\alpha = k_0 a A$. Zusammen mit den Gln. (17) und (18) und den allgemeinen Werten für die modifizierten Beugungsfaktoren $\delta_{e,m}(\varphi_0, 1')$ an den stationären Punkten (siehe Gl. (11)) erhält man so eine geschlossene approximative Darstellung des Streufeldes im Fernbereich der Aperturkante. Die Integralapproximation (36) wurde zunächst für *kleine* und *große* Inzidenz- und Streuwinkel $\vartheta_{i,s}$ hergeleitet; der Spezialfall senkrechter Inzidenz ($\vartheta_i = \vartheta_s = 0^\circ$ mit $\varphi_l = \varphi_s$) von Gl. (30) kann hieraus natürlich wieder abgeleitet werden. Mit $\Phi = \pi/2 - \varphi_l$, $A = 0$, $\chi_0 = 0$ und $\chi_2 = \pi$ geht die Näherungslösung (36) in das exakte Ergebnis über.

Mit einer heuristischen Argumentation wendet man die approximative uniforme Integraldarstellung (33) und ihre exakte Lösung (36) nun auch im *Zwischenbereich* für mittlere Aspektwinkel $\vartheta_{i,s}$ an. Diese Vorgehensweise rechtfertigt sich aus Vergleichen mit einer numerischen Gauß-Quadratur der Beugungsintegrale, die im gesamten Bereich gute Übereinstimmung mit der genäherten Lösung zeigt. Im monostatischen Spezialfall fanden Pathak et al [10] durch Vergleiche mit der exakten Wiener-Hopf-Lösung für die Beugung am halbunendlichen Kreiszyylinder ebenfalls eine gute Übereinstimmung im gesamten Aspektwinkelbereich.

5. Feldkomponenten im Fernfeld

Mit Hilfe der Methode der äquivalenten ^{1,31}Kantenströme (ECM) konnte in den Gln. (17) und (18) eine Fernfelddarstellung des bistatischen Streubeitrags der kreisförmigen Kante angegeben werden. Es wurden anschließend die acht auftretenden Beugungsintegrale näherungsweise gelöst (siehe Gl. (36)). Im folgenden sollen nun die Streufeldkomponenten mit Hilfe einer Streumatrixschreibweise in übersichtlicher Weise dargestellt werden.

5.1 Streumatrixformulierung

Die Gln. (17) und (18) für die Fernfeldkomponenten des Streufelds können in folgender Matrixform geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} E_{\vartheta}^s \\ E_{\varphi}^s \end{pmatrix} = [S] \begin{pmatrix} E_{\vartheta}^i \\ E_{\varphi}^i \end{pmatrix} \frac{e^{-jk_0 r_s}}{k_0 r_s} \quad (37)$$

$$\begin{pmatrix} H_{\vartheta}^s \\ H_{\varphi}^s \end{pmatrix} = Y_0 [V] \begin{pmatrix} E_{\vartheta}^s \\ E_{\varphi}^s \end{pmatrix}$$

mit der Transformationsmatrix

$$[V] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Unter den Feldkomponenten der einfallenden Welle seien hier die Werte im Koordinatenursprung ($r = 0$) verstanden, die nach Gl. (1) zu den komplexen Phasoren A_{ϑ}^i und A_{φ}^i identisch sind:

$$E_{\vartheta}^i = E_{\vartheta}^i \Big|_{r=0} = A_{\vartheta}^i, \quad E_{\varphi}^i = E_{\varphi}^i \Big|_{r=0} = A_{\varphi}^i \quad (39)$$

$[S]$ ist die Fernfeldstrematrix und hat folgende Darstellung:

$$[S] = \begin{pmatrix} S_{\vartheta\vartheta} & S_{\vartheta\varphi} \\ S_{\varphi\vartheta} & S_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \quad (40)$$

mit den einzelnen Streukoeffizienten

$$\begin{aligned} S_{\vartheta\vartheta} &= I_e^{ss} \cos \vartheta_i \cos \vartheta_s - I_m^{cc} \\ S_{\vartheta\varphi} &= -I_e^{cs} \cos \vartheta_s - I_m^{sc} \cos \vartheta_i \\ S_{\varphi\vartheta} &= -I_e^{sc} \cos \vartheta_i - I_m^{cs} \cos \vartheta_s \\ S_{\varphi\varphi} &= I_e^{cc} - I_m^{ss} \cos \vartheta_i \cos \vartheta_s \end{aligned} \quad (41)$$

5.1.1 Eigenschaften der Streumatrix

Führt man folgende Aufspaltung der Näherungslösung der Beugungsintegrale (siehe Gl. (36)) durch

$$\begin{aligned} I_{e,m}^{ss} &= \delta_{e,m}(\varphi_{0,1}') I^{ss}, & I_{e,m}^{cs} &= \delta_{e,m}(\varphi_{0,1}') I^{cs} \\ I_{e,m}^{sc} &= \delta_{e,m}(\varphi_{0,1}') I^{sc}, & I_{e,m}^{cc} &= \delta_{e,m}(\varphi_{0,1}') I^{cc} \end{aligned} \quad (42)$$

so kann man die Aperturkanten-Streumatrix $[S]$ in zwei Teilstreumatrizen zerlegen:

$$[S] = \delta_e(\varphi_{0,1}') [S_e] + \delta_m(\varphi_{0,1}') [S_m] \quad (43)$$

mit

$$[S_e] = \begin{pmatrix} I^{ss} \cos \vartheta_i \cos \vartheta_s & -I^{cs} \cos \vartheta_s \\ -I^{sc} \cos \vartheta_i & I^{cc} \end{pmatrix}$$

und

$$[S_m] = \begin{pmatrix} -I^{cc} & -I^{sc} \cos \vartheta_i \\ -I^{cs} \cos \vartheta_s & -I^{ss} \cos \vartheta_i \cos \vartheta_s \end{pmatrix}.$$

Mit der Aufspaltung (43) kann man den Streubeitrag, der durch den elektrischen äquivalenten Kantenstrom I_e verursacht wird, unabhängig vom Beitrag des magnetischen äquivalenten Kantenstroms I_m untersuchen. Man findet zwischen beiden

Teilstreumatrizen folgende bemerkenswerte Beziehung:

$$[S_m] = [V] [S_e] [V]$$

mit der Transformationsmatrix $[V]$ aus Gl. (38).

5.2 Monostatischer Spezialfall

Im monostatischen Streuproblem fallen Einfall- und Streurichtung zusammen ($\varphi_i = \varphi_s$ und $\vartheta_i = \vartheta_s$). Man erhält dann mit den Ergebnissen aus dem Abschnitt 4.2.1 die beiden Winkel $\chi_0 = 0$ und $\chi_2 = \pi$. Damit kann man sofort die Näherungslösung der Beugungsintegrale unter Beachtung der Gln. (36) und (42) angeben:

$$\begin{aligned} I^{ss} &= \pi (J_0(\alpha) + J_2(\alpha)) = 2\pi \frac{J_1(\alpha)}{\alpha} \\ I^{cc} &= \pi (J_0(\alpha) - J_2(\alpha)) = 2\pi J_1'(\alpha) \\ I^{sc} &= I^{cs} = 0 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der modifizierten Beugungsfaktoren $\delta_{e,m}(\varphi_{0,1}')$ für den monostatischen Spezialfall (Gl. (34)) findet man schließlich aus Gl. (41) die Streukoeffizienten der monostatischen Streumatrix, die aufgrund des rotationssymmetrischen Kreiszyinders nicht mehr von den azimutalen Winkeln $\varphi_{i,s}$ abhängen:

$$S_{\vartheta\vartheta} = -\frac{k_0 a}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{\cos \vartheta_s} \right) \cos^2 \vartheta_s \frac{J_1(\alpha)}{\alpha} - \left(1 - \frac{1}{\cos \vartheta_s} \right) J_1'(\alpha) \right] \quad (44)$$

$$S_{\varphi\varphi} = \frac{k_0 a}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{\cos \vartheta_s} \right) \cos^2 \vartheta_s \frac{J_1(\alpha)}{\alpha} - \left(1 + \frac{1}{\cos \vartheta_s} \right) J_1'(\alpha) \right] \quad (45)$$

mit $\alpha = k_0 a A = 2 k_0 a \sin \vartheta_s$. Da die Nebendiagonalelemente zu Null werden ($S_{\vartheta\varphi} = S_{\varphi\vartheta} = 0$), ist $[S]$ nach Gl. (40) eine Diagonalmatrix. Die monostatischen Streukoeffizienten aus den Gln. (44) und (45) stimmen vollständig mit denjenigen überein, die von *Pathak et al* in [10] angegeben wurden. Für senkrechte Inzidenz mit $\vartheta_i = \vartheta_s = 0^\circ$ erhält man:

$$S_{\vartheta\vartheta} = S_{\varphi\varphi} = -\frac{k_0 a}{2} \quad (46)$$

5.3 Polarisationsbetrachtungen

Setzt man wegen der Rotationssymmetrie des Streukörpers o.B.d.A. den azimutalen Einfallswinkel $\varphi_i = 0^\circ$ (siehe Bild 1), so kann man eine lineare (V-H) Polarisationsbasis sehr einfach bilden:

$$E_V = E_{\vartheta}, \quad E_H = E_{\varphi}$$

Die Streumatrix für lineare Polarisation (vertikal bzw. horizontal) ist demnach zu der Streumatrix

[S] aus Gl. (37) identisch. Eine zirkulare Polarisationsbasis (LIIC-RIIC) erhält man aus der Transformation:

$$\begin{pmatrix} E_{LIIC} \\ E_{RIIC} \end{pmatrix} = [U] \begin{pmatrix} E_V \\ E_H \end{pmatrix}$$

mit der unitären Matrix

$$[U] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{pmatrix}.$$

Die imaginäre Einheit ist dabei $j = \sqrt{-1}$. Die unitäre Matrix [U] erfüllt die Bedingung $[U] = ([U]^{-1})'$, also ist die konjugiert komplexe Matrix gleich der Transponierten der Inversen. Man kann demnach für $\varphi_i = 0^\circ$ auch schreiben:

$$\begin{pmatrix} E_\vartheta \\ E_\varphi \end{pmatrix} = [U]^{-1} \begin{pmatrix} E_{LIIC} \\ E_{RIIC} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Führt man nun diese Transformation (47) in die Streugleichungen (37) ein, so findet man den Zusammenhang zwischen ein- und ausfallenden zirkular polarisierten Wellen:

$$\begin{pmatrix} E_{LIIC}^s \\ E_{RIIC}^s \end{pmatrix} = [U][S][U]^{-1} \begin{pmatrix} E_{LIIC}^i \\ E_{RIIC}^i \end{pmatrix} \frac{e^{-j k_0 r_s}}{k_0 r_s}. \quad (48)$$

Analog zur Gl. (39) wird auch hier unter Beachtung der Transformation (47) das einfallende Feld am Ort $r = 0$ betrachtet:

$$E_{LIIC}^i = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\vartheta^i - j A_\varphi^i)$$

$$E_{RIIC}^i = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\vartheta^i + j A_\varphi^i).$$

Mit der Streumatrix [S] für lineare Polarisationsvektoren aus Gl. (40) erhält man nach zweifacher Matrizenmultiplikation die neue Polarisationsstreumatrix $[S_U]$ für eine zirkulare Polarisationsbasis:

$$[S_U] = [U][S][U]^{-1} = \begin{pmatrix} S_{LL} & S_{LR} \\ S_{RL} & S_{RR} \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Die einzelnen Streukoeffizienten sind:

$$S_{LL} = S_{RR}^* = \frac{1}{2} [S_{\vartheta\vartheta} + S_{\varphi\varphi} + j(S_{\vartheta\varphi} - S_{\varphi\vartheta})] \quad (50)$$

$$S_{LR} = S_{RL}^* = \frac{1}{2} [S_{\vartheta\vartheta} - S_{\varphi\varphi} - j(S_{\vartheta\varphi} + S_{\varphi\vartheta})].$$

Im monostatischen Spezialfall wird die Streumatrix [S] für lineare Polarisation diagonal (siehe die Gln. (44) und (45)); das bedeutet, daß im Rahmen der ECM-Rechnungen keine Depolarisation stattfindet. Wegen $S_{\vartheta\varphi} = S_{\varphi\vartheta} = 0$ wird dann nach Gl. (50) die Polarisationsstreumatrix $[S_U]$ für zirkulare Polarisation reell und symmetrisch. Wird zu-

sätzlich noch senkrechte Inzidenz vorausgesetzt ($\vartheta_i = \vartheta_s = 0^\circ$), so gilt unter Beachtung von Gl. (46):

$$S_{LL} = S_{RR} = S_{\vartheta\vartheta} = -\frac{k_0 a}{2}$$

$$S_{LR} = S_{RL} = 0,$$

und die Matrix $[S_U]$ wird nach Gl. (49) diagonal. Eine axial einfallende zirkular polarisierte Welle wird demnach auch nicht depolarisiert. Man beachte dabei, daß die Drehrichtung der Polarisation stets im jeweiligen Bezugssystem der einfallenden bzw. gestreuten Welle definiert wird, wobei der Beobachter jeweils in Richtung der Wellenausbreitung blickt.

6. Streudiagramme

Zur Darstellung des Streuverhaltens der Aperturkante eines halbumendlichen Kreiszyinders wird die räumliche Verteilung der radialen Energiestromdichte des Streufelds betrachtet:

$$P_{r_s}^s = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \vec{E}^s \times (\vec{H}^s)^* \right\} \cdot \hat{r}_s.$$

Im Fernfeld kann man wegen der Beziehung $\vec{H}^s = Y_0 \hat{r}_s \times \vec{E}^s$ auch vereinfacht schreiben:

$$P_{r_s}^s = \frac{Y_0}{2} (|E_\vartheta^s|^2 + |E_\varphi^s|^2).$$

Mit Hilfe der Streugleichungen (37) kann somit die radiale Energiestromdichte im Fernfeld bestimmt werden:

$$P_{r_s}^s = \frac{Y_0}{2} \left\{ |A_\vartheta^i S_{\vartheta\vartheta} + A_\varphi^i S_{\vartheta\varphi}|^2 + |A_\vartheta^i S_{\varphi\vartheta} + A_\varphi^i S_{\varphi\varphi}|^2 \right\} \frac{1}{(k_0 r_s)^2}.$$

Die normierte Strahlungscharakteristik C, die meist in einer logarithmischen Darstellung angegeben wird, wird daraus wie folgt berechnet:

$$C(\vartheta_i, \vartheta_s, \varphi_i, \varphi_s) = \frac{P_{r_s}^s(\vartheta_i, \vartheta_s, \varphi_i, \varphi_s)}{P_{r_s}^s \max}.$$

$P_{r_s}^s \max$ ist dabei ein Normierungswert, der die radiale Energiestromdichte in Hauptstrahlungsrichtung angibt. Aus Symmetrieüberlegungen folgert man für die Streuung am Kreiszyinder, daß die Strahlungscharakteristik im *monostatischen* Radarfall nicht von dem azimuthalen Winkel $\varphi_i = \varphi_s$ abhängt, während im *bistatischen* Fall nur die Differenz ($\varphi_i - \varphi_s$) beider Winkel in das Streudiagramm eingeht:

$$C^m = C(\vartheta_s), \quad C^b = C(\vartheta_i, \vartheta_s, \varphi_i - \varphi_s). \quad (51)$$

Bei einer vertikal polarisierten einfallenden Welle und $\varphi_i = 0^\circ$ gilt $A_\psi^i = 0$ (siehe Bild 1), und man erhält die noch zu normierende Richtcharakteristik

$$C_V = |S_{\vartheta\vartheta}|^2 + |S_{\varphi\vartheta}|^2 \quad (52)$$

Analog gilt bei einer einfallenden horizontal polarisierten Welle $A_\psi^i = 0$ und man erhält entsprechend:

$$C_H = |S_{\varphi\varphi}|^2 + |S_{\vartheta\varphi}|^2 \quad (53)$$

Bei einer einfallenden Welle mit zirkularer Polarisation erhält man schließlich mit Hilfe von Gl. (48) die noch nicht normierte Richtcharakteristik:

$$\begin{aligned} C_C = C_{LHC} = C_{RHC} &= 2(|S_{LL}|^2 + |S_{LR}|^2) = \\ &= C_V + C_H = |S_{\vartheta\vartheta}|^2 + |S_{\varphi\vartheta}|^2 + |S_{\varphi\varphi}|^2 + |S_{\vartheta\varphi}|^2 \end{aligned} \quad (54)$$

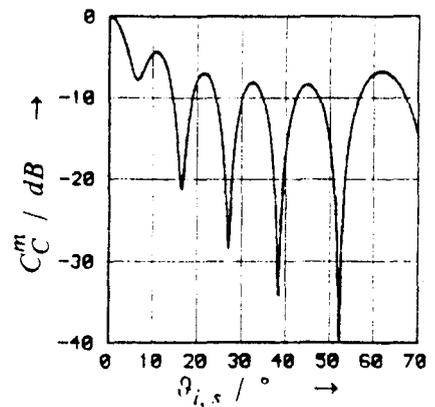
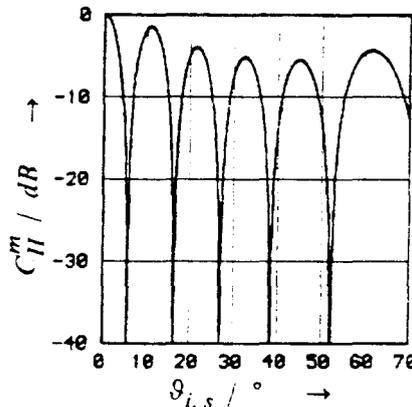
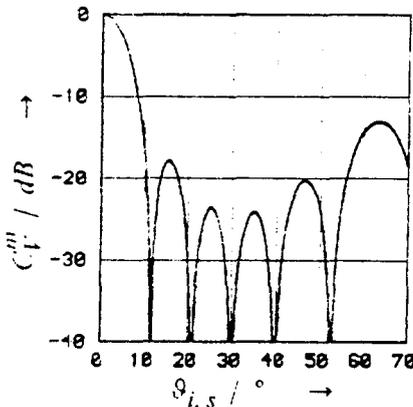


Bild 4. Monostatische Richtcharakteristik: C_V^m , C_H^m bzw. C_C^m nach Gl. (55) für eine einfallende vertikal, horizontal oder zirkular polarisierte ebene Welle. Der Durchmesser $2a$ des Rundhohlleiters beträgt drei Wellenlängen ($k_0 a = 3\pi$).

6.2 Bistatische Streucharakteristik

Für einen normierten Hohlleiterradius $k_0 a = 3\pi$ ($2a = 3\lambda_0$) zeigen die folgenden dreidimensionalen Polardiagramme die räumliche Verteilung der gestreuten Energiestromdichte im bistatischen Streuproblem. Es wurde eine logarithmische Darstellung mit einem Dynamikbereich von -40 dB bis 0 dB benutzt. Die Einfallsrichtung der ebenen Welle wird jeweils durch $\varphi_i = 0^\circ$ und $\vartheta_i = 0^\circ$ bzw. $\vartheta_i = 15^\circ$ beschrieben. Das Streudiagramm wird nur im Bereich $0^\circ \leq \vartheta_{i,s} \leq 70^\circ$ dargestellt. Für eine einfallende vertikal, horizontal bzw. zirkular polarisierte ebene Welle findet man die jeweilige Richtcharakteristik C_V , C_H und C_C im Bild 5.

7. Schlußbemerkungen

In dieser Arbeit wurde das Radarproblem der bistatischen Streuung ebener elektromagnetischer Wellen am halbbunendlichen Kreiszyylinder betrachtet. Dabei wurde speziell die Beugung an der kreisförmigen Aperturkante näherungsweise untersucht. Zur Vermeidung des Kaustikproblems bei

6.1 Monostatische Rückstreuquerschnitte

Im monostatischen Radarfall hängt die Richtcharakteristik C^m nach Gl. (51) nur vom Winkel $\vartheta_i = \vartheta_s$ ab. Für einen normierten Hohlleiterradius $k_0 a = 3\pi$ ($2a = 3\lambda_0$) wird im Bild 4 die monostatische Richtcharakteristik dargestellt. Es wurde eine normierte logarithmische Darstellung mit einem Dynamikbereich von -40 dB bis 0 dB benutzt. Die Streukoeffizienten $S_{\vartheta\vartheta}$ und $S_{\varphi\varphi}$ wurden aus den Gln. (44) und (45) entnommen; mit ihnen erhält man das Streuverhalten einer jeweils vertikal, horizontal oder zirkular polarisierten einfallenden ebenen Welle:

$$\begin{aligned} C_V^m &= |S_{\vartheta\vartheta}|^2, & C_H^m &= |S_{\varphi\varphi}|^2, \\ C_C^m &= |S_{\vartheta\vartheta}|^2 + |S_{\varphi\varphi}|^2. \end{aligned} \quad (55)$$

Man findet in den Diagrammen den stärksten Rückstreubeitrag stets bei axialer Inzidenz ($\vartheta_i = \vartheta_s = 0^\circ$).

der strahlenoptischen Hochfrequenzlösung wurde die ECM benutzt, die aus Elementen der geometrischen Beugungstheorie aufgebaut ist. Die auftretenden Beugungsintegrale konnten zur Bestimmung der Fernfeldstreuikomponenten näherungsweise berechnet werden. Im monostatischen Spezialfall wurde die Übereinstimmung mit bekannten Ergebnissen aus der Literatur gezeigt.

Der Anwendungsbereich der ECM-Rechnungen ist auf einen Bereich $0^\circ \leq \vartheta_{i,s} \leq 70^\circ$ beschränkt. Eine Erweiterung auf alle Raumwinkelbereiche einschließlich der geometrisch-optischen Schatten- und Reflexionsgrenzen ist durch die Kombination der ECM mit der UTD möglich; letztere Methode liefert außerhalb von Kaustikbereichen eine singularitätenfreie Felddarstellung.

Von besonderem Interesse ist eine zukünftige Untersuchung des Streufeldes in unmittelbarer Nähe der Aperturkante. Zur Steigerung der Genauigkeit der durchgeführten Näherungsrechnungen können auch höhere Terme, die auf mehrfach gestreute Strahlen zurückzuführen sind, betrachtet werden.

Ferner können auch andere Anregungsmechanismen untersucht werden. Bei *Schroth* und *Kark* [14] findet man z.B., anstelle einer einfallenden

ebenen Welle, die Anregung durch einen elektrischen Punktdipol auf der Symmetrieachse des Kreiszyllinders.

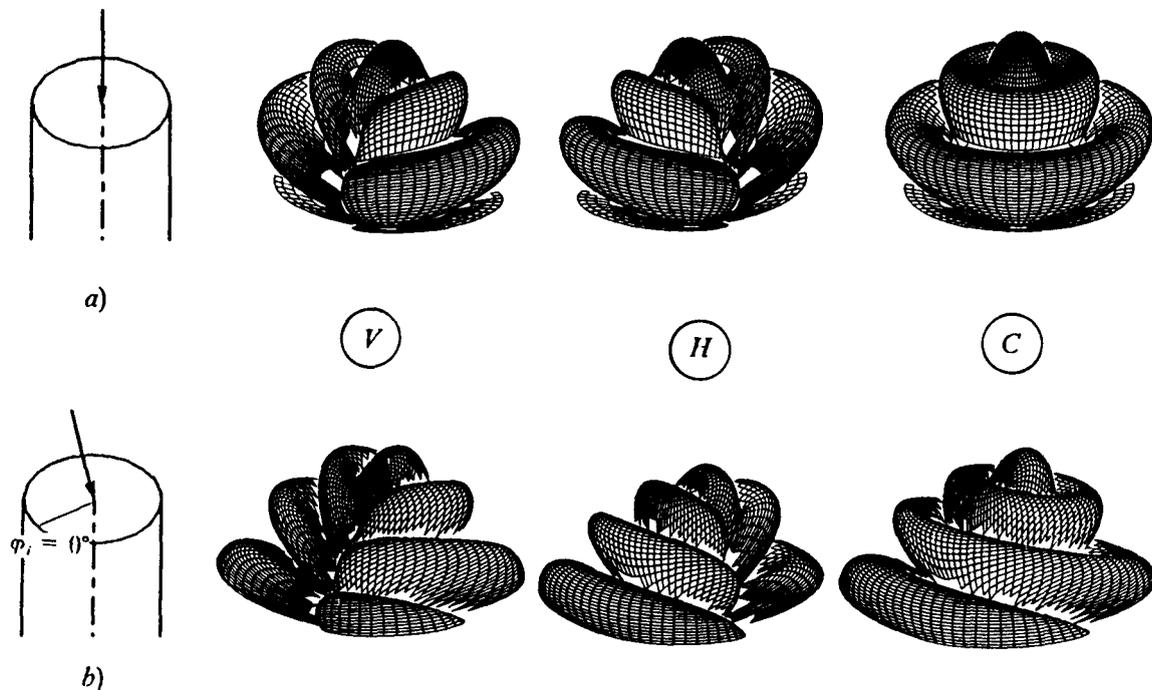


Bild 5. Bistatische Richtcharakteristik: C_V , C_H bzw. C_C (siehe die Gln. (52) bis (54)) für eine einfallende vertikal, horizontal oder zirkular polarisierte ebene Welle. Der Durchmesser $2a$ des Rundhohlleiters beträgt drei Wellenlängen ($k_0 a = 3\pi$). Es werden zwei Fälle dargestellt: a) axialer Einfall ($\theta_i = 0^\circ$) und b) schräger Einfall ($\theta_i = 15^\circ$).

Literaturverzeichnis

- [1] Erdélyi, A.: *Asymptotic Expansions*. Dover Publ., New York (1956), 51-56.
- [2] Felsen, L.B.; Marcuvitz, N.: *Radiation and Scattering of Waves*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1973), 370-441.
- [3] James, G.L.: *Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves*. IEE Electromagnetic Waves Series 1, Peregrinus, Stevenage (1976), 28-34.
- [4] Johnson, T.W.; Moffat, D.L.: *Electromagnetic Scattering by Open Circular Waveguides*. Radio Science, vol. 17 (1982), 1547-1556.
- [5] Keller, J.B.: *Geometrical Theory of Diffraction*. Journal Optical Society Am., vol. JOSA-52 (1962), 116-130.
- [6] Knott, E.F.; Senior, T.B.A.: *Equivalent Currents for a Ring Discontinuity*. IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-21 (1973), 693-695.
- [7] Knott, E.F.; Senior, T.B.A.: *Comparison of Three High-Frequency Diffraction Techniques*. Proc. of the IEEE, vol. 62 (1974), 1468-1474.
- [8] Kouyoumjian, R.G.; Pathak, P.H.: *A Uniform Geometrical Theory of Diffraction for an Edge in a Perfectly Conducting Surface*. Proc. of the IEEE, vol. 62 (1974), 1448-1461.
- [9] Kouyoumjian, R.G.; Pathak, P.H.; Burnside, W.D.: *A Uniform GTD for the Diffraction by Edges, Vertices and Convex Surfaces; 497-561 in: Skwirzynski, J.K. (Ed.): NATO Advanced Study Institute on Theoretical Methods for Determining the Interaction of Electromagnetic Waves with Structures*. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, (1981).
- [10] Pathak, P.H.; Huang, C.C.; Lai, C.Y.; Moffat, D.L.: *Analysis of Electromagnetic Backscatter from an Inlet Cavity Configuration*. Final Report 712661-4, The Ohio State University, ElectroScience Laboratory, Department of Electrical Engineering (1983), 37-39.
- [11] Pathak, P.H.; Chuang, C.W.; Liang, M.C.: *Near Field Scattering by Rectangular and Circular Inlet Configurations*. Final Report 716495-2, The Ohio State University, ElectroScience Laboratory, Department of Electrical Engineering (1985), 20-28.
- [12] Pathak, P.H.: *Techniques for High Frequency Problems; Kap.4 (Teil A) in: Lo, Y.T.; Lee, S.W. (Eds.): Handbook of Antenna Theory and Design*. Van Nostrand, New York (1988).
- [13] Schroth, A.; Stein, V.: *Moderne numerische Verfahren zur Lösung von Antennen- und Streuproblemen*. Oldenbourg, München (1985), 30-91.
- [14] Schroth, A.; Kark, K.W.: *Anwendung der geometrischen Beugungstheorie in der EMV-Analyse*. EMV-Kongreß, Karlsruhe, 18.-20.10.88.
- [15] Silver, S.: *Microwave Antenna Theory and Design*. MIT Radiation Laboratory Series, McGraw-Hill (1949), 87-90.
- [16] Sommerfeld, A.: *Vorlesungen über Theoretische Physik, Band IV: "Optik"*. Harri Deutsch, Thun (1978), 215-238.
- [17] Weyrich, R.: *Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen*. Teubner, Leipzig (1937), 12-28.