

Modenanalyse in toroidalen Taperhohlleitern

Klaus Werner Kark

Es wird das elektromagnetische Randwertproblem für verlustfreie, schwach inhomogene Hohlleiter mit kreisförmigem Querschnitt untersucht. Ausgehend vom kanonischen Problem des homogenen Rundhohlleiters wird der Einfluß von kleinen Änderungen des Querschnittsradius und einer schwachen Krümmung der Längsachse auf das stationäre Feldproblem bestimmt. Aufgrund des sich nur langsam ändernden Hohlleiterverlaufs können mit Hilfe einer verbesserten adiabatischen Modentheorie und einer Störungsrechnung nach Rayleigh und Schrödinger analytische Näherungslösungen der Feldgleichungen gefunden werden. Nach einer getrennten Betrachtung von Taper und Toroid ermöglicht schließlich die Superposition beider auftretenden Störeffekte die näherungsweise Berechnung eines toroidalen Tapers.

The electromagnetic boundary value problem is treated for loss-free, slightly inhomogeneous hollow waveguides with circular cross section. Starting from the canonical problem of the homogeneous circular cylinder the influence of small changes of the cross sectional radius and of a slightly bent longitudinal axis on the stationary field problem is investigated. Since the shape of the hollow waveguide changes only slowly, approximate analytical solutions of the field equations can be found applying an improved adiabatic mode theory and a perturbational approach of Rayleigh and Schrödinger. After a separate investigation of the tapered and the toroidal waveguide the corresponding perturbation terms are superimposed in order to determine the modal behaviour of a toroidal and tapered waveguide.

1 Einleitung

Hohlleiter mit kreisförmigem Querschnitt sind wichtige Bauelemente der Mikrowellentechnik. Sie werden in der Radar-, Richtfunk- und Satellitenfunktechnik eingesetzt. Ausgehend vom kreiszylindrischen Hohlleiter (Rundhohlleiter) werden in dieser Arbeit drei weitere Hohlleitertypen untersucht (siehe Bild 1):

- Rundhohlleiter-Taper,
- Toroidhohlleiter,
- toroidaler Taperhohlleiter.

Rundhohlleiter-Taper werden als Anpassungsglieder zwischen Hohlleitern unterschiedlichen Durchmessers eingesetzt. Zur Vermeidung starker Reflexions- und Kopplungsverluste weisen Taperprofile keine Knicke oder Sprünge der Randkurve auf. Es wird vielmehr ein sanfter und schwach inhomogener Übergang angestrebt. Toroidale Hohlleiter mit gekrümmter Längsachse werden u. a. als Antennenspeiseleitungen eingesetzt, und der ringförmig geschlossene Torus dient z. B. als Hohlräumresonator in der Plasmaphysik. Der toroidale Taper bzw. getaperte Toroid besitzt ein allgemeineres Längsschnittprofil. Der Querschnittsradius ist langsam veränderlich, und die Längsachse ist schwach und uniform gekrümmt.

Durch die Abweichungen der metallischen Randflächen von der kreiszylindrischen Form ist die Wellenausbreitung im inhomogenen Hohlleiter gestört. Für nicht zu starke Störungen können Näherungslösungen der Maxwell'schen Gleichungen angegeben werden. Man geht dazu von den

bekanntesten Eigenwellen des kanonischen homogenen Rundhohlleiters aus und berücksichtigt die auftretenden Modenkopplungen durch geeignet zu bestimmende Korrekturterme. Der störungstheoretische Zugang mit Hilfe einer modifizierten adiabatischen Modenrechnung liefert für die betrachteten Hohlleiter einfache und kompakte Näherungslösungen der Feldgleichungen. Der analytische Aufwand ist zwar etwas höher als bei früheren Verfahren (siehe z. B. [1]), jedoch erhält man kopplungsarme quasi-Eigenfunktionsdarstellungen, die sich für eine effiziente numerische Auswertung besonders eignen.

2 Der Kreiszyylinder

2.1 Das Prinzip der kleinen Störungen

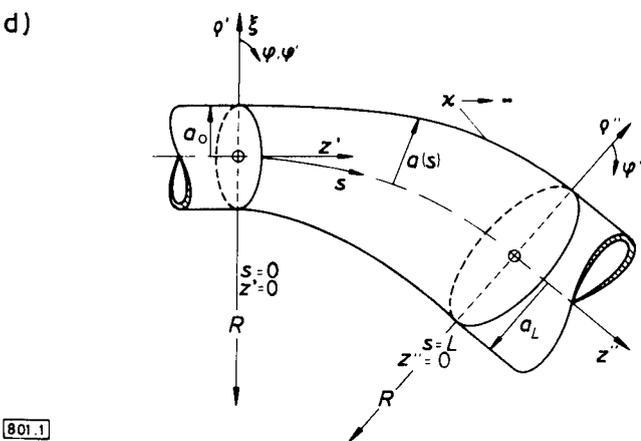
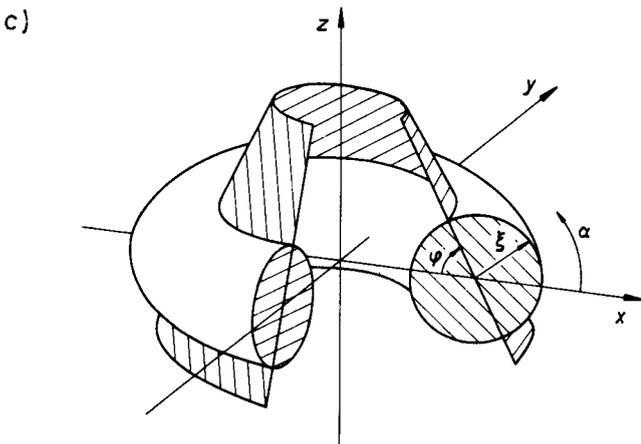
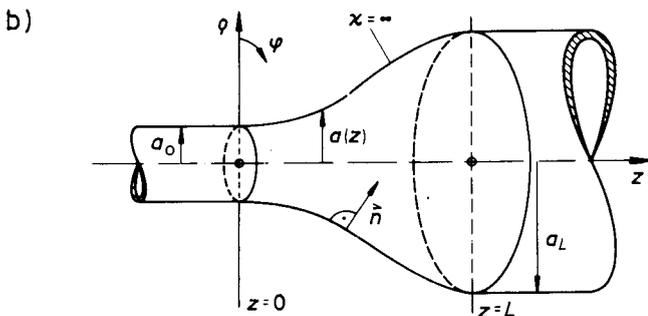
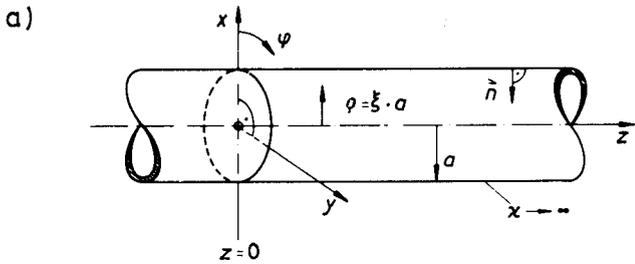
Stationäre elektromagnetische Felder als Lösungen elliptischer partieller Differentialgleichungen verhalten sich stetig gegenüber kleinen Störungen [2]. Man kann erwarten, daß sich die Feldverteilung einer geführten Welle im Inneren des kanonischen kreiszylindrischen Hohlleiters bei leichter Symmetriedeformation nur gering verändert. Darauf beruht die Anwendbarkeit von Störungs- und Variationsverfahren zur Bestimmung einer Approximation des sich einstellenden Feldes. Die resultierende Felddeformation verschwindet stetig bei Annäherung an die homogene Zylinderstruktur. Der kreiszylindrische Hohlleiter läßt sich somit als Grenzfall der inhomogenen Struktur ansehen.

In dieser Arbeit werden zwei Arten der angesprochenen Inhomogenitäten hinsichtlich ihres Einflusses auf die Feldverteilung geführter Hohlleiterwellen untersucht: Radiusänderungen sowie Achskrümmungen. Sie werden zunächst getrennt und später kombiniert betrachtet. Es werden auf analytischem Wege geschlossene Ausdrücke für die Störterme hergeleitet, die eine approximative Beschreibung der Wellenausbreitung ermöglichen.

2.2 Die ungestörten Feldlösungen

Im vorliegenden Kapitel werden die Lösungen der elektromagnetischen Feldgleichungen für den ungestörten homogenen Kreiszyylinder angegeben. Diese Felder dienen im nächsten Schritt als Lösung nullter Ordnung für die nachfolgende störungstheoretische Behandlung des inhomogenen Hohlleiters.

Benutzt man das in Bild 1 dargestellte System der orthogonalen Kreiszyylinderkoordinaten (ρ, φ, z) , so ist die elektrisch ideal leitend angenommene Hohlleiterwand eine Koordinatenfläche. Der betrachtete Rundhohlleiter erstreckt sich nach beiden Seiten längs der z -Achse bis ins Unendliche und sei reflexionsfrei abgeschlossen. Die Maxwell'schen Gleichungen in quellenfreien, linearen, isotropen



801.1

Bild 1. Hohlleiter kreisförmigen Querschnitts
a) Rundhohlleiter
b) Rundhohlleiter-Taper
c) Toroidhohlleiter
d) toroidaler Taperhohlleiter

und homogenen Gebieten kann man bei harmonischer Zeitabhängigkeit ($e^{j\omega t}$) mit Hilfe der Lorentzkonvention (siehe z.B. [3]) in die skalare Helmholtz-Gleichung überführen:

$$(\Delta + k^2) A = 0. \quad (1)$$

$\vec{A} = A \vec{e}_z$ ist das Vektorpotential, $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ die Wellenzahl und Δ der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten (siehe z.B. [4]). Mit einem Bernoulli-Separationsansatz (der Index ⁽⁰⁾ bezieht sich auf den ungestörten homogenen Rundhohlleiter)

$$A^{(0)}(\rho, \varphi, z) = f_1^{(0)}(\rho) f_2^{(0)}(\varphi) f_3^{(0)}(z) \quad (2)$$

kann man die skalare Helmholtz-Gleichung (1) in drei gewöhnliche Differentialgleichungen aufspalten. Aus deren Lösungen ergibt sich die bekannte Form des Vektorpotentials im kreiszylindrischen Hohlleiter:

$$A^{(0)}(\rho, \varphi, z) = J_m(K \rho) \begin{cases} \cos m \varphi \\ \sin m \varphi \end{cases} e^{\pm j k_z z}. \quad (3)$$

Die geschweiften Klammern sollen eine beliebige Linearkombination der trigonometrischen Funktionen andeuten. J_m ist die Besselfunktion der ganzzahligen Ordnung $m = 0, 1, 2, \dots$ und k_z die Ausbreitungskonstante der betrachteten Hohlleiterwelle. Die radialen Wellenzahlen

$$K_E = j_{mn}/a \quad (4)$$

und

$$K_H = j'_{mn}/a \quad (5)$$

erhält man aus den Randbedingungen der E - und H -Wellen am Hohlleiterrand $\rho = a$. Der Index $n = 1, 2, 3, \dots$ beschreibt die n -te Nullstelle der Besselfunktion J_m bzw. ihrer Ableitung J'_m nach deren Argument $K \rho$. Als Abkürzung, wobei alle Doppelindizes der Einfachheit halber zu einem einzigen zusammengefaßt werden, führt man eine neue Eigenwert-Variable τ_ν mit $\nu = (m, n)$ ein:

$$\tau_\nu = \tau_{mn} = \begin{cases} j_{mn} & \text{bei } E_{mn}\text{-Wellen,} \\ j'_{mn} & \text{bei } H_{mn}\text{-Wellen.} \end{cases} \quad (6)$$

Damit folgt für die Ausbreitungskonstante k_z , bei der man der Einfachheit halber auf eine Indizierung mit ν verzichtet,

$$k_z = \sqrt{k^2 - \tau_\nu^2/a^2}. \quad (7)$$

Ist der Radikand positiv, so erhält man ein reelles k_z und somit eine ausbreitungsfähige Welle. Höhere Moden mit großen Eigenwerten τ_ν können einen negativen Radikanden aufweisen. Sie sind im Hohlleiter nicht ausbreitungsfähig und werden beim Fortschreiten exponentiell gedämpft.

Die durch Separation gefundenen Eigenwellen sind linear unabhängig, koppeln nicht miteinander und bilden ein vollständiges Funktionensystem. Sie sind der Struktur auf natürliche Weise angepaßt und erfüllen sowohl die Maxwell'schen Gleichungen als auch die Randbedingungen exakt. Eine Eigenwelle, deren Vektorpotential sich wie $\cos m \varphi$ verhält, wird als symmetrisch und eine mit $\sin m \varphi$ als antisymmetrisch bezeichnet. Es sollen die symmetrischen Moden mit einem Hochkomma (E'_ν, H'_ν) und die antisymmetrischen mit deren zwei (E''_ν, H''_ν) gekennzeichnet werden.

Bei rotationssymmetrischen Moden mit $m = 0$ ist die symmetrische Orientierung selbstverständlich; man bezeichnet sie als E_0 - bzw. H_0 -Wellen, ohne Hochkomma.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + K^2(z) - \frac{m^2}{\rho^2} \right) f_1 = -2 \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{df_3}{f_3 dz} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} - f_1 \left(\frac{d^2 f_3}{f_3 dz^2} + k_z^2(z) \right). \quad (10)$$

3 Der Taper

Einen einfachen Zugang zur approximativen Feldberechnung im Taper erhält man mit den adiabatischen Näherungsmethoden, die auf *Born* und *Oppenheimer* [5] zurückgehen. Adiabatische Moden sind lokale Eigenmoden der betrachteten Anordnung und passen sich als Näherungslösung der Feldgleichungen fließend durch Änderung ihres Querschnitteigenwerts

$$K(z) = \tau_{\nu}/a(z) \quad (8)$$

der veränderlichen Struktur an [6]. Die gegenseitige Verkopplung der adiabatischen Moden ist wegen dieses adaptiven Verhaltens gering. Für die Rechnungen kann die Randkurve des Tapers weitgehend frei gewählt werden, jedoch muß sie glatt und schwach veränderlich sein.

In dieser Arbeit werden die herkömmlichen adiabatischen Moden in zweifacher Weise modifiziert. Zur genaueren Erfüllung der skalaren Helmholtz-Gleichung wird für das Vektorpotential ein neuer Radialterm hergeleitet, und zur Verbesserung des Verhaltens am Hohlleiterrand wird die hybride Kopplung mit einer anderen Welle berücksichtigt. Im direkten Vergleich mit der homogenen Anordnung wird der Einfluß der Inhomogenität auf die Energiegeschwindigkeit diskutiert. Zur physikalischen Interpretation der Wellenausbreitung in inhomogenen Tapern wird die Energiebeschleunigung als neue Größe eingeführt.

3.1 Teilseparation

Mangels eines der Struktur angepaßten separierbaren Koordinatensystems werden orthogonale Kreiszyylinderkoordinaten benutzt. Insbesondere soll nach einer Lösung der skalaren Helmholtz-Gleichung (1) für das Vektorpotential A gesucht werden. Da im inhomogenen Taperhohlleiter nach Bild 1 der Querschnittsradius $a(z)$ mit der Längskoordinate z schwach variiert, kann man erwarten, daß eine vollständige Separation der Helmholtz-Gleichung in Zylinderkoordinaten nicht möglich sein wird. Tatsächlich kann man nur die azimutale Eigenfunktion f_2 abspalten; die Radial- und Longitudinalterme f_1 und f_3 bleiben miteinander verknüpft. Dem Rechnung tragend benutzt man einen Ansatz zur Teilseparation der Helmholtz-Gleichung (vgl. Gl. (2)):

$$A(\rho, \varphi, z) = f_1(\rho, z) f_2(\varphi) f_3(z), \quad (9)$$

wobei die longitudinale Eigenfunktion $f_3(z)$ im Prinzip beliebig gewählt werden kann, weil die z -Abhängigkeit ja immer noch völlig allgemein im quasi-Radialterm f_1 enthalten ist. Man wird aber für f_3 eine sinnvolle Wahl treffen, so daß die resultierende Bestimmungsgleichung für die noch unbekannte Funktion $f_1(\rho, z)$ möglichst einfach zu lösen sein wird. Man kann wie beim homogenen Rundhohlleiter die azimutale Eigenfunktion $f_2(\varphi) = f_2^{(0)}(\varphi)$ noch exakt abspalten (siehe Gl. (3)). Für die restlichen beiden Eigenfunktionen findet man die Bestimmungsgleichung:

Die radiale Wellenzahl K (siehe Gl. (8)) und die Ausbreitungskonstante k_z seien wie im homogenen Rundhohlleiter über die Bedingung

$$k^2 = K^2(z) + k_z^2(z) \quad (11)$$

miteinander verknüpft. Die Differentialgleichung (10) vereinfacht sich wesentlich, wenn man für f_3 die Erfüllung derselben Differentialgleichung wie im homogenen Fall fordert:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_z^2(z) \right) f_3(z) = 0. \quad (12)$$

Im schwach veränderlichen Taper sind $K(z)$ und $k_z(z)$ schwach von der Längskoordinate z abhängende Funktionen. Somit kann man bei Beachtung von Gl. (12) annehmen, daß der Quasi-Radialterm $f_1(\rho, z)$ ebenfalls nur schwach von z abhängt. Macht man die vereinfachende Annahme (f_1 sei dabei ungleich Null):

$$f_1 \gg \partial f_1 / \partial z \gg \partial^2 f_1 / \partial z^2, \quad (13)$$

so erhält man schließlich aus Gl. (10) unter Beachtung von Gl. (12) eine einfachere Bestimmungsgleichung für den Quasi-Radialterm f_1 :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + K^2(z) - \frac{m^2}{\rho^2} \right) f_1(\rho, z) = -2 \frac{\partial f_1(\rho, z)}{\partial z} \frac{df_3(z)}{f_3(z) dz}. \quad (14)$$

Gl. (12) kann näherungsweise mit Hilfe der WKBJ-Methode [7] gelöst werden. Von Bedeutung ist hierbei, ob die Ausbreitungskonstante $k_z(z)$ im betrachteten z -Intervall des Tapers eine Nullstelle besitzt oder nicht. Eine Stelle z_c mit $k_z(z_c) = 0$ heißt Übergangspunkt der Dgl. (12). In dieser Arbeit werden nur Übergangspunkte der Ordnung 1 betrachtet, d.h. hier besitzt die Ausbreitungskonstante eine einfache Nullstelle. Der Hohlleiterquerschnitt z_c definiert den Grenzquerschnitt der betrachteten Welle. Die Welle wird dort total reflektiert; dahinter wird sie exponentiell gedämpft. Gilt jedoch im gesamten Taper $k_z \neq 0$, so lautet die WKBJ-Lösung der Dgl. (12):

$$f_3(z) = (1/\sqrt{k_z(z)}) \exp \left[\pm j \int_{z_0}^z k_z(\tilde{z}) d\tilde{z} \right]. \quad (15)$$

z_0 ist dabei eine beliebige Konstante. Betrachtet man dagegen einen Hohlleitermode, der an der Stelle z_c seinen Grenzquerschnitt erreicht, so findet man (siehe [8]) als approximative Darstellung für die Längseigenfunktion f_3 :

$$\begin{aligned} f_3(z <) &= (\Phi^{1/6}/\sqrt{k_z}) \{C Ai(-\xi) + D Bi(-\xi)\}, \\ f_3(z >) &= (|\Phi|^{1/6}/\sqrt{|k_z|}) \{C Ai(\xi) + D Bi(\xi)\}. \end{aligned} \quad (16)$$

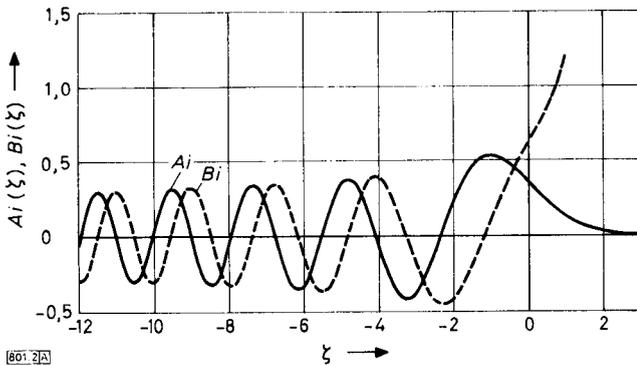


Bild 2. Die Airy-Funktionen erster Art $Ai(\xi)$ und zweiter Art $Bi(\xi)$. Die Stelle $\xi = 0$ ist mit dem hier betrachteten Grenzquerschnitt z_c identisch.

$z <$ bezeichnet eine Stelle vor dem Grenzquerschnitt und $z >$ eine dahinter. Φ ist das sogenannte Phasenintegral:

$$\Phi(z) = \int_z^{z_c} k_z(\bar{z}) d\bar{z} \quad (17)$$

Es gilt der Zusammenhang:

$$\xi = (3|\Phi|/2)^{2/3} \quad (18)$$

Ai und Bi kennzeichnen die Airy-Funktionen erster bzw. zweiter Art [9]. Sie sind in Bild 2 dargestellt. C und D sind beliebige Konstanten.

Nachdem die Längseigenfunktion f_3 angenähert bestimmt wurde, kann man eine Näherungslösung von Gl. (14) mit Hilfe einer Picard-Iteration konstruieren [10]. Der Radialterm des Vektorpotentials der Eigenwellen im homogenen Rundhohlleiter dient als Startwert und damit als Ausgangsnäherung nullter Ordnung:

$$f_1^{(0)} = J_m(K(z)\rho) \quad (19)$$

Die erste Iterierte $f_1^{(1)}$ enthält bereits alle Korrekturterme von erster Ordnung $O(a')$ mit $a' = da/dz$:

$$f_1^{(1)} = \exp\left[Q \frac{dK}{K^3 dz} P\right] J_m(K\rho) \quad (20)$$

Q und P sind Abkürzungen für die folgenden Ausdrücke:

$$Q(z) = \frac{df_3}{f_3 dz} \quad (21)$$

$$P(\rho, z) = m - \frac{(K\rho)^2}{2} - K\rho \frac{d(\ln J_m(K\rho))}{d(K\rho)} \quad (22)$$

Geht man nun mit dem so gebildeten Vektorpotential der modifizierten adiabatischen Moden (MAM)

$$A_{MAM} = f_1^{(1)}(\rho, z) f_2^{(0)}(\varphi) f_3(z) \quad (23)$$

in die skalare Helmholtz-Gleichung (1) hinein, so erhält man schließlich einen Einsetzfehler, der von 2. Ordnung klein ist:

$$(\Delta + k^2) A_{MAM} = O(a'', a'^2) \quad (24)$$

Mit dem Vektorpotential der gewöhnlichen adiabatischen Moden (AM) [6]:

$$A_{AM} = f_1^{(0)}(\rho) f_2^{(0)}(\varphi) f_3(z) \quad (25)$$

das die gleichen Querschnitteigenfunktionen wie der homogene Rundhohlleiter gleichen Querschnittes besitzt, hatte man noch einen wesentlich größeren Fehler (von 1. Ordnung) in Kauf nehmen müssen:

$$(\Delta + k^2) A_{AM} = O(a') \quad (26)$$

Die skalare Helmholtz-Gleichung kann somit durch den neuen verbesserten Radialterm, Gl. (20), um eine Fehlerordnung besser erfüllt werden. Damit das neue Verfahren der modifizierten adiabatischen Moden auch in sich konsistent ist, müssen die Randbedingungen mit derselben Genauigkeit wie die Helmholtz-Gleichung erfüllt werden. Zur Erfüllung der Randbedingungen im homogenen Rundhohlleiter wurden die radialen Wellenzahlen K_E und K_H wie in den Gln. (4) und (5) bestimmt. Ihre Werte werden analog auch für die Tapermoden benutzt. Hierin zeigt sich deutlich die adiabatische Anpassung an die veränderliche Struktur. Die Moden ändern ihre radiale Wellenzahl $K(z) = \tau_\nu/a(z)$ derart, daß immer die gleiche Anzahl von radialen Nullstellen des Felds in den jeweiligen Querschnitt hineinpaßt. Pierce [11] kennzeichnete diese Adaptionfähigkeit mit dem Prinzip von der Erhaltung der Modenindices ν . Das Feldbild wird beim Fortschreiten in z -Richtung verzerrungsfrei gestaucht oder gedehnt, so daß es immer in den jeweiligen Querschnitt hineinpaßt. Mit dieser Näherung können allerdings die Randbedingungen nicht mehr erfüllt werden. Eine näherungsweise Erfüllung der Randbedingungen kann jedoch durch die Kombination einer E - mit einer H -Welle zu einem hybriden gekoppelten Modenpaar erreicht werden.

3.2 Gekoppelte Modenpaare

Im allgemeinen Rundhohlleiter-Taper sind mangels eines konformen, separierbaren Koordinatensystems keine exakten Eigenwellen mit jeweils nur fünf Feldkomponenten bekannt. Mit Ausnahme einiger spezieller Formen der Hohlleiterrandkurve $a(z)$ (hyperbolisches Profil, lineare Taperung) kann keine exakte Feldlösung angegeben werden.

Zur Darstellung der adiabatischen Moden werden in dieser Arbeit kreiszylindrische Koordinaten benutzt, die der Tapergeometrie nur unvollkommen angepaßt sind. Die so konstruierten Moden werden daher zwangsweise über die Randbedingungen miteinander verkoppelt. Die näherungsweise Erfüllung der Randbedingungen mittels eines gekoppelten Hybridpaares geschieht dadurch, daß sich bei Wahl eines geeigneten Koppelkoeffizienten $\gamma(z)$ unerwünschte Feldkomponenten der E - und H -Welle gegenseitig in 1. Ordnung $O(a')$ aufheben. Damit dies im gesamten Taperintervall gleichermaßen möglich ist, muß einerseits der Koppelkoeffizient eine schwach variable Funktion von z sein, und andererseits müssen sich die beiden verkoppelten Moden gleich schnell ausbreiten, d.h. sie dürfen nicht außer Phase laufen. Damit erhalten beide verkoppelten Moden die gleiche Ausbreitungskonstante $k_z(z)$ und die gleiche radiale Wellenzahl $K(z) = \tau_\nu/a(z)$.

Das hybride Wellenpaar vom EH_ν - bzw. HE_ν -Typ reduziert sich im homogenen Grenzfall (bei $a' = 0$) auf die gewöhnliche E_ν - bzw. H_ν -Welle des geraden Kreiszylinders. Der Koppelkoeffizient γ muß dann verschwinden. Man

kann für ein hybrides Wellenpaar einen ortsabhängigen Koppelkoeffizienten $\gamma(z)$ errechnen, mit dem eine approximative Erfüllung der Randbedingungen möglich wird [10]:

$$\gamma(z) = -j k a(z) a'(z) m / \tau_z^2. \quad (27)$$

Im Kegelhorn mit konstanter Randsteigung a' erkennt man, daß bei größer werdender Radialabmessung ka das Wellenpaar stärker gekoppelt ist. Die stärkste Paarverkopplung erfahren die niedrigen Moden mit kleinen Eigenwerten τ_ν . Der Spezialfall $m=0$ sei ausgeschlossen. Einen typischen Verlauf des Betrags des Koppelkoeffizienten $|\gamma(z)|$ innerhalb des EH_{11} -Hybridpaares für eine Schar exponentieller Taper im Bereich $0 \leq kz \leq 10$ mit

$$ka(kz) = 6 - (1 - kz/10)^\alpha \exp(\alpha kz/10) \quad (28)$$

und dem Scharparameter

$$\alpha = 1, 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22 \quad (29)$$

zeigt Bild 3. Der Pfeil deutet die Richtung zunehmenden Scharparameters an. Der Wert $\alpha=1$ stellt einen entarteten Sonderfall dar. Er ermöglicht keinen knickfreien Übergang. Stattdessen wurde $\alpha=1,1$ in die Schar mit aufgenommen.

Während der Fehler beim Erfüllen der Randbedingungen durch die Paarverkopplung auf einen Wert von 2. Ordnung $O(a'', a'^2)$ verkleinert werden konnte, so war er ohne Berücksichtigung der Koppelkorrektur noch von 1. Ordnung $O(a')$. Damit wurde in konsistenter Weise sowohl bei der Helmholtz-Gleichung als auch den Randbedingungen die gleiche Fehlerordnung erreicht.

Modifizierte adiabatische Moden unterscheiden sich von den gewöhnlichen adiabatischen Moden durch ihren korrigierten Quasi-Radialterm $f_1^{(1)}$ (siehe Gl. (20)) und die Verkopplung zu hybriden Modenpaaren. Der Genauigkeitsgewinn durch diese Modifikationen wurde im Fall des konischen Lineartapers (Kegelhorn) untersucht. Die Eigenfunktionen des Kegelhorns können in einer Kugelwellendarstellung noch exakt angegeben werden. Ein Vergleich zwischen der gewöhnlichen adiabatischen Modenlösung (AM ohne Paarverkopplung), die noch den einfachen Radialterm $f_1^{(0)}$ benutzt, mit der modifizierten Lösung $f_1^{(1)}$ (MAM mit Paarverkopplung) zeigt eine mittlere Verkleinerung der Abweichung von der exakten Kugelwellenlösung um etwa 50%. Die neue MAM-Methode liefert somit eine genauere Felddarstellung als die ältere AM-Theorie bei der approximativen Analyse inhomogener Wellenleiterverbindungen.

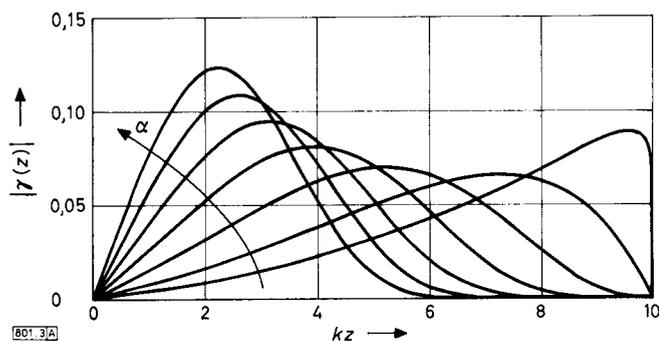


Bild 3. Darstellung des Koppelkoeffizienten $|\gamma|$ für das EH_{11} -Hybridpaar im Taper mit γ aus Gl. (27) für die Schar exponentieller Taper wie in Gl. (28). Die Richtung zunehmenden Scharparameters (siehe Gl. (29)) ist durch einen Pfeil angedeutet.

3.3 Der Energiefluß

Zum besseren Verständnis der Wellenausbreitung in inhomogenen Taperleitungen wird nun die mittlere Strömungsgeschwindigkeit der Energie eines Hybridmodenpaares untersucht. Die Definition der Energiegeschwindigkeit nach Borgnis [12]:

$$v_E = N/W = \frac{(1/2) \int_F \text{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \} \vec{e}_z dF}{(\epsilon/4) \int_F (|E|^2 + Z^2 |H|^2) dF} \quad (30)$$

erfordert eine Berechnung des zeitgemittelten Energieflusses N und des Energiebelags W . F ist die kreisförmige Querschnittsfläche des Hohlleiters. Für modifizierte adiabatische Moden erhält man daraus nach einiger Rechnung [10]:

$$v_E(z) = [k_z(z)/k] c, \quad (31)$$

mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$. Wegen der variablen Ausbreitungskonstante $k_z(z)$ ist nun auch die Energiegeschwindigkeit eine Funktion der Längskoordinate z geworden. Läuft eine Welle in Richtung größerer radialer Abmessungen, so wächst ihre Energiegeschwindigkeit nach Gl. (31) an (beachte Gl. (7)). Im Grenzfall einer unendlich fernen Hohlleiterwand erhält man quasi Freiraumbedingungen ($k_z \rightarrow k$), und die Welle breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit $v_E = c$ des betreffenden Mediums aus. Bei Wellenausbreitung in einen sich monoton verengenden Hohlleiter hinein nimmt die Energiegeschwindigkeit proportional zur Ausbreitungskonstante ab. Man kann daraus schließen, daß der Energiefluß im Grenzquerschnitt ($k_z(z_0) = 0$) zum Stillstand kommt, sich umkehrt und die Welle total reflektiert zurück läuft, wobei sie wieder beschleunigt wird. In dieser Arbeit wird erstmals der Begriff der mittleren Energiebeschleunigung b_E definiert:

$$b_E = v_E dv_E/dz = (1/2) dv_E^2/dz. \quad (32)$$

Im Falle des Rundhohlleiter-Tapers erhält man mit v_E aus Gl. (31):

$$b_E(z) = k'_z k_z (c/k)^2. \quad (33)$$

Bei sich verengendem Kanal gilt $k'_z < 0$, und die Beschleunigung ist eigentlich eine Wellenverzögerung. Bei Annäherung an den Grenzquerschnitt wird die Welle bis zum Stillstand abgebremst und läuft nach Totalreflexion wieder beschleunigt zurück. Der Taper wirkt als Anpassungsglied zwischen zwei homogenen Raumteilen mit jeweils anderer Energiegeschwindigkeit. Er beschleunigt oder bremst den einfallenden Mode, bis er die angepaßte Energiegeschwindigkeit des anschließenden Hohlleiters erreicht. Somit kann man eine getaperte Leitung auch als Energiegeschwindigkeitstransformator bezeichnen.

4 Der Toroid

Als zweiter Themenkreis neben dem Rundhohlleiter-Taper wird in dieser Arbeit der schwach und uniform gekrümmte Toroidhohlleiter untersucht. Man kann ihn sich aus einem homogenen Rundhohlleiter entstanden denken, dessen Achse nicht geradlinig sondern schwach gekrümmt verläuft. Die Symmetriedeformation wird als Störung der homogenen Anordnung angesehen, und mit Hilfe der Rayleigh-

Schrödinger-Störungstheorie [13] werden Korrekturen zum ungestörten Feld berechnet.

Toroidale Strukturen wurden seit *Jouguet* [14] für verschiedene Zwecke bereits mehrmals untersucht. Der klassischen Anwendung als Wellenleiterbaustein zur Nachrichtenübertragung steht in neuerer Zeit die Verwendung als ringförmig geschlossener Resonator in der Plasmaphysik gegenüber. Torusstrukturen kreisförmigen Querschnitts führen immer auf nicht separierbare Differentialgleichungen (mit Ausnahme der Laplace-Gleichung für den statischen Grenzfall). So ist man zur Lösung auf Näherungsmethoden angewiesen. *Jouguet* [14] und *Lewin* [15] befaßten sich mit dem Toroidhohlleiter, während *Brambilla* [16], *Cap* [17], *Lileg* [18] und *Schupfer* [19] den geschlossenen Torusresonator untersuchten. *Weston* [20] betrachtete die Streuung elektromagnetischer Wellen an einem Torus.

In dieser Arbeit wird erstmals der Formalismus der Störungstheorie nach *Rayleigh* und *Schrödinger* auf den Toroidhohlleiter angewandt. Das Feld wird hier nicht über die Vektorpotentiale wie beim Rundhohlleiter-Taper dargestellt, sondern es werden Lösungen für die longitudinalen Feldkomponenten hergeleitet, womit über die Maxwell'schen Gleichungen auch die Transversalfelder festgelegt sind. Die skalarisierten Gleichungen der Längsfeldstärken können mit Hilfe einer bikomplexen Transformation entkoppelt und damit entscheidend vereinfacht werden. Im Gegensatz zum Torusresonator existieren im Toroidhohlleiter keine toroidal uniformen Moden, die nicht von der Umfangskoordinate α bzw. s (siehe Bild 4) abhängen und nur drei Feldkomponenten besitzen. Bei der Berechnung des Torusresonators beschränkte man sich bisher überwiegend auf diesen einfacheren Spezialfall, da hier E -Wellen und H -Wellen voneinander entkoppelt sind. Im Toroidhohlleiter gibt es dagegen nur Hybridfelder mit jeweils sechs Feldkomponenten.

In einer Störungsrechnung 1. Ordnung werden alle Eigenfunktionen mitsamt den zugehörigen Ausbreitungskonstan-

ten der EH - und HE -Hybridwellen bestimmt. Für die unendlichen Reihen der Störterme in den Eigenfunktionen können exakte, geschlossene Ausdrücke angegeben werden. Es wird erstmals das gesamte Modenspektrum aller EH - bzw. HE -Wellen untersucht. Physikalisch anschauliche Darstellungen der transversalen Feldlinien innerhalb der gestörten Struktur sowie Untersuchungen des longitudinalen Energieflusses schließen sich an. Für zwei niedrige Wellentypen werden im Vergleich mit dem geraden Kreiszyylinder die transversalen Feldlinien und die räumliche Verteilung der zeitgemittelten Energieströmung graphisch dargestellt.

4.1 Die gestörte Helmholtz-Gleichung

Die Maxwell'schen Gleichungen in lokalen Toruskoordinaten (ξ, φ, α) (siehe Bild 4 mit dem normierten Radius $\xi = \rho/a$ und $0 \leq \xi \leq 1$) können bei uniformer und ebener Krümmung der toroidalen Längsachse auf ein gekoppeltes Paar partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung für die longitudinalen Feldkomponenten E_α und H_α reduziert werden [16]:

$$(\Delta_t + \lambda) E = \delta (L_1 E + L_2 ZH), \quad (34)$$

$$(\Delta_t + \lambda) ZH = \delta (-L_2 E + L_1 ZH). \quad (35)$$

Hierzu werden die Abkürzungen $E = h E_\alpha$ und $H = h H_\alpha$ eingeführt. Dabei ist $h(\xi, \varphi) = 1 - \delta \xi \cos \varphi$ der toroidale Metrikkoeffizient, und $\delta = q/R$ ist das normierte Radienverhältnis. a ist der kleine und R der große Torusradius, weswegen aus geometrischen Gründen immer $0 \leq \delta \leq 1$ gilt. Zur Dimensionsbefreiung wurde der Feldwellenwiderstand des freien Raumes $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ benutzt. Δ_t ist der transversale Laplace-Operator, und L_1 sowie L_2 sind Störungsoperatoren von 1. Ordnung mit

$$\Delta_t = \frac{\partial}{\xi \partial \xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2}{\xi^2 \partial \varphi^2}, \quad (36)$$

$$L_1 = \frac{1 + \gamma^2}{h(1 - \gamma^2)} \left(\frac{\sin \varphi}{\xi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} \right), \quad (37)$$

$$L_2 = \frac{-2\gamma}{h(1 - \gamma^2)} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\cos \varphi}{\xi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (38)$$

Dabei wurde die dimensionslose Größe γ eingeführt, die über den Metrikkoeffizienten h von den transversalen Koordinaten ξ und φ abhängt:

$$\gamma = \beta/[k h(\xi, \varphi)]. \quad (39)$$

Der Parameter

$$\lambda = (ka)^2 (1 - \gamma^2) \quad (40)$$

hängt über γ von der bislang noch unbekanntenen Ausbreitungskonstante β ab, die als Eigenwert der Dgl. (42) betrachtet werden kann. Alle Feldkomponenten haben die longitudinale Abhängigkeit $e^{i(\omega t - \beta s)}$ mit der toroidalen Bogenlänge $s = R \alpha$. Mit Hilfe der bikomplexen Transformation

$$F = E + i ZH \quad (41)$$

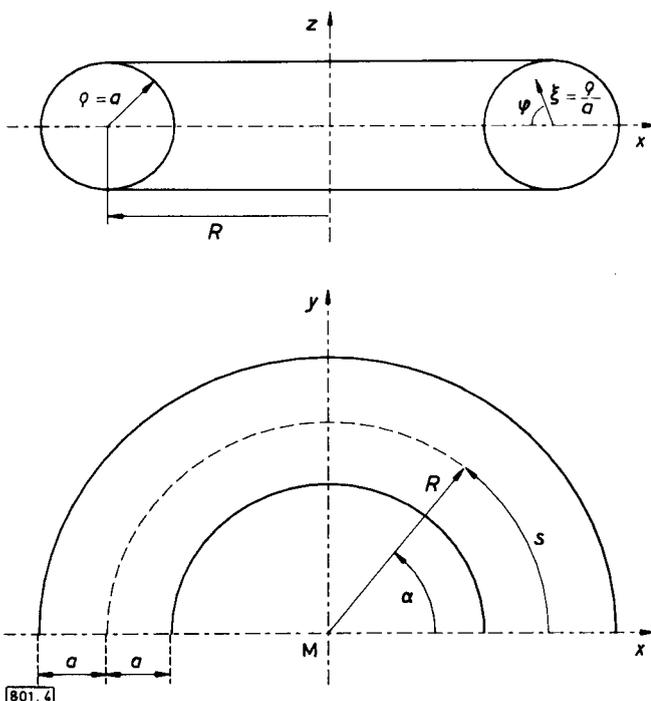


Bild 4. Torus mit Koordinatensystemen: Kartesische Koordinaten (x, y, z) und lokale Toruskoordinaten (ξ, φ, α) bzw. (ρ, φ, s) als verallgemeinerte Kreiszyylinderkoordinaten

gelingt eine elegante Entkopplung der Gln. (34) und (35), und man erhält eine gestörte homogene Helmholtz-Gleichung mit den zugehörigen Randbedingungen [10]:

$$(\Delta_t + \lambda) F = \delta L F, \quad (42)$$

$$E_\alpha|_{\xi=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial H_\alpha}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0. \quad (43)$$

$L = L_1 - i L_2$ ist ein komplexer Störungsoperator von 1. Ordnung. Die i -komplexe Ebene, die in Gl. (41) eingeführt wurde, muß streng von der j -komplexen Ebene getrennt werden, die bereits für eine elegantere Beschreibung der Zeitabhängigkeit ($\cos \omega t \rightarrow e^{j\omega t}$) mittels j -komplexer Phasoren benutzt wird. Es gilt stets $i^2 = j^2 = -1$, aber $ij \neq -1$. Das Rechnen mit zwei komplexen Ebenen ist eng verwandt mit dem Quaternionenkalkül der Spinoralgebra [21]. Mit der Quaternionenschreibweise ließe sich zwar die bikomplexe Darstellung noch weiter formalisieren; eine konsequente Unterscheidung der beiden imaginären Einheiten i und j genügt aber für die Zwecke dieser Arbeit vollauf.

4.2 Störungsrechnung

Die Grundidee zur Lösung der nicht separierbaren Helmholtz-Gleichung (42) ist es, die Krümmung der Längsachse des Toroidhohlleiters als Störung der Symmetrie des homogenen Rundhohlleiters mit gerader Achse anzusehen. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen im Toroid müssen sich bei wachsender Störung ($\delta > 0$) stetig aus den Lösungen $F^{(0)}$ und $\beta^{(0)}$ der ungestörten Differentialgleichung ($\delta = 0$) ergeben. Man beachte dabei, daß Gl. (42) noch völlig exakt für beliebige Werte des normierten Radienverhältnisses δ mit $0 \leq \delta \leq 1$ gilt. Somit können die gestörten Eigenfunktionen als Entwicklung nach Potenzen des normierten Radienverhältnisses $\delta = a/R$ dargestellt werden. Die Entwicklungskoeffizienten sind Linearkombinationen der ungestörten Eigenwellen des geraden Kreiszyinders. In dieser Arbeit sollen nur Toroidhohlleiter mit schwacher Krümmung ($0 \leq \delta \leq 1$) betrachtet werden, so daß die gesuchten Entwicklungen schon nach dem linearen Term δ abgebrochen werden dürfen. Damit macht man einen Störungsansatz erster Ordnung für die bikomplexe Feldfunktion F_ν und die Ausbreitungskonstante β_ν :

$$F_\nu = F_\nu^{(0)} + \delta F_\nu^{(1)}, \quad (44)$$

$$\beta_\nu = \beta_\nu^{(0)} + \delta \beta_\nu^{(1)}. \quad (45)$$

Hier werden wieder alle Doppelindices (m, n) zu einem einzigen (ν) zusammengezogen. Der Störterm $F_\nu^{(1)}$ wird nach dem vollständigen Funktionensystem der ungestörten Eigenfunktionen $F_\mu^{(0)}$ mit bislang noch unbekanntem Entwicklungskoeffizienten $c_{\nu\mu}$ entwickelt:

$$F_\nu^{(1)} = \sum_\mu c_{\nu\mu} F_\mu^{(0)}. \quad (46)$$

Mit diesem Ansatz geht man in Gl. (42) und vernachlässigt alle Terme von 2. Ordnung $O(\delta^2)$. Unter Ausnutzung der Orthogonalitätseigenschaften der ungestörten Lösungen $F_\mu^{(0)}$ kann man die Entwicklungskoeffizienten $c_{\nu\mu}$ bestimmen, und man erhält die unendlichen Störreihen (46), die mit Hilfe des Residuensatzes der Funktionentheorie in geschlossene Ausdrücke übergeführt werden können. Die

daraus resultierenden expliziten Störterme findet man in [10]. Man beachte dabei, daß zur Bestimmung der Störung einer E_{1n} - bzw. H_{0n} -Welle, die im homogenen Rundhohlleiter miteinander entartet sind, ein etwas anderer Störungsansatz zu machen ist. Im einzelnen kann dies hier aber nicht mehr gezeigt werden. Jedenfalls wird die Entartung aufgehoben, und es zeigt sich, daß nur die antisymmetrische E''_{1n} -Welle mit der H_{0n} -Welle wechselwirkt, wie man es schon länger vom Weitverkehrshohlkabel her kennt (siehe z.B. [22]).

4.3 Feldverdrängung

Zum besseren Verständnis der Wellenausbreitung in toroidalen Hohlleitern werden einige Darstellungen der gestörten Feldverteilungen mit den Feldern des geraden Kreiszyinders verglichen. Die magnetischen Feldlinien in einem transversalen Querschnitt sind im Bild 5 für die E''_{11} -Welle gezeigt, während die transversale Verteilung der longitudinalen Komponente des Poyntingschen Vektors

$$P_\alpha = 0,5 \operatorname{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \} \cdot \vec{e}_\alpha \quad (47)$$

in Bild 6 dargestellt wird. Zum Zeichnen der Feldlinien wurde ein Algorithmus nach Greving [23] benutzt. Die Intensität im Energiefluß nimmt von weiß bis schwarz linear quantisiert zu. Beide Diagramme zeigen eine bemerkenswerte Verschiebung sowohl der Feldlinien als auch der Energieströmung in den äußeren Querschnittsbereich weg vom Krümmungsmittelpunkt des Toroids, der jeweils auf der rechten Seite der Bilder in Richtung $\varphi = 0$ liegt. Es fällt eine Erhöhung der zeitgemittelten Energiestromdichte P_α im äußeren Querschnittsbereich auf, während innen eine Abschwächung festgestellt werden kann. Dies führt im Toroidhohlleiter zu einer unsymmetrischen Energieströmung. Entsprechende Diagramme werden in Bild 7 und Bild 8 für die H'_{11} -Welle gezeigt. Sie ist die Grundwelle im homogenen Rundhohlleiter, bei der man im Toroid die gleichen Feldverdrängungseffekte beobachten kann wie schon bei der E''_{11} -Welle. Insgesamt wurden die niedrigsten fünf Rundhohlleitermoden auf ihr gestörtes Verhalten im Toroidhohlleiter untersucht, wobei stets der gleiche Effekt beobachtet werden konnte [10].

5 Der toroidale Taper

Als Verallgemeinerung wird schließlich eine kombinierte Struktur betrachtet, in der beide Störungen der Rundhohlleiter-Symmetrie gemeinsam auftreten. Der toroidale Taper (getaperte Toroid) besitzt eine uniform und schwach gekrümmte Längsachse und einen sich langsam erweiternden (bzw. verengenden) Kreisquerschnitt (siehe Bild 1). Ein solcher inhomogener Hohlleiter ist in der Literatur bisher mit analytischen Näherungsverfahren noch nicht untersucht worden. Nach der getrennten Untersuchung beider Symmetriestörungen führt eine lineare Superposition der Feldlösungen für Taper und Toroid zu einer approximativen Beschreibung der Wellenausbreitung in diesem Hohlleitertyp [10]. Es wird das lokale Toruskoordinatensystem (ξ, φ, s) benutzt. Für eine Näherungsrechnung erster Ordnung können die Korrekturterme, die vom sich ändernden Radius $O(a')$ herrühren, und jene, die durch die gekrümmte Längsachse $O(\delta)$ angeregt werden, separat berechnet werden. Im nächsten Schritt überlagert man sie linear. Ein hybrider Koppelterm, der sich als klein von 2. Ordnung

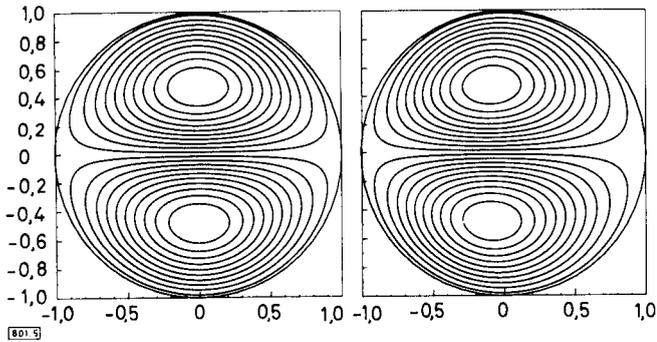


Bild 5. Transversale Magnetfeldlinien für die antisymmetrische E'_{11} -Welle im geraden Kreiszyylinder ($\delta = 0$) und im Toroidhohlleiter ($\delta = 0,042$)

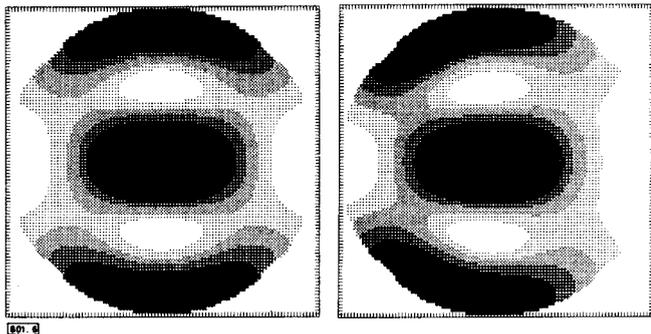


Bild 6. Transversale Verteilung der longitudinalen Komponente P_α des Poyntingvektors (siehe Gl. (47)) für die antisymmetrische E'_{11} -Welle im geraden Kreiszyylinder ($\delta = 0$) und im Toroidhohlleiter ($\delta = 0,042$)

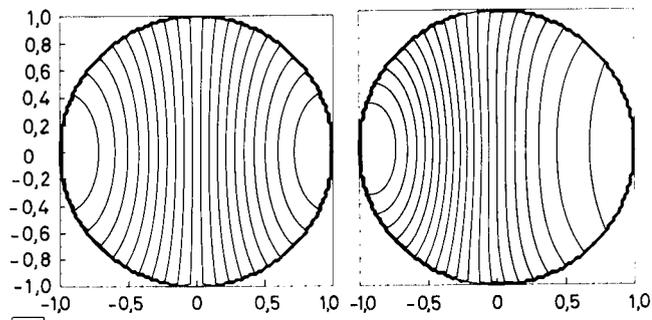


Bild 7. Transversale elektrische Feldlinien für die symmetrische H'_{11} -Welle im geraden Kreiszyylinder ($\delta = 0$) und im Toroidhohlleiter ($\delta = 0,02$)

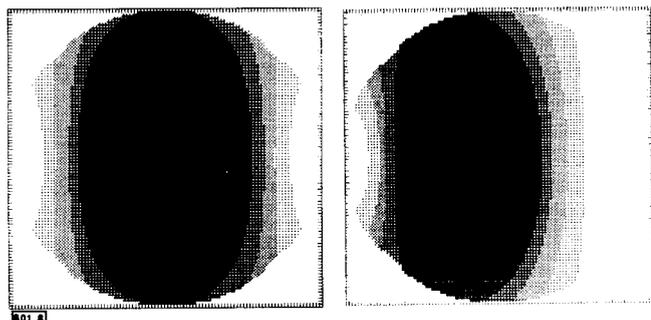


Bild 8. Transversale Verteilung der longitudinalen Komponente P_α des Poyntingvektors (siehe Gl. (47)) für die symmetrische H'_{11} -Welle im geraden Kreiszyylinder ($\delta = 0$) und im Toroidhohlleiter ($\delta = 0,02$)

$O(a'^2, a'', \delta^2, a'\delta)$ erweist, kann vernachlässigt werden, vorausgesetzt die geometrische Symmetriestörung bleibt auch wirklich klein.

Die Kombination der adiabatischen Rechnungen mit der Störungstheorie ermöglicht erstmals einen analytischen Zugang zur mathematischen Untersuchung dieses Hohlleitertyps. Durch die lineare Superposition der beiden Inhomogenitäten ergeben sich insbesondere die gleichen Phänomene der Energiebeschleunigung und Feldverdrängung wie beim Taper bzw. Toroid selbst. Die beiden Störanteile überlagern sich in erster Ordnung kopplungsfrei und sind voneinander unabhängig. Man erhält im toroidalen Taper deswegen die gleichen Kurven und Diagramme wie beim Taper (siehe Bild 3) und Toroid (siehe Bild 5 bis 8) selbst.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Es wird das elektromagnetische Randwertproblem für verlustfreie Hohlleiter mit kreisförmigem Querschnitt untersucht. Die Eigenwellen des kanonischen homogenen Kreiszyinders können durch eine Separation der skalaren Helmholtz-Gleichung noch exakt angegeben werden. Wird dagegen die Form der metallischen Randflächen nur geringfügig abgeändert, so kann man i.a. schon keine analytisch exakte Feldlösung mehr finden.

In dieser Arbeit werden inhomogene Hohlleiter betrachtet, die man als gestörte Rundhohlleiter ansehen kann. Es wird der Einfluß von kleinen Änderungen des Querschnittsradius (Rundhohlleiter-Taper) und einer schwachen Krümmung der Längsachse (Toroidhohlleiter) auf das stationäre Feldproblem bestimmt. Zunächst werden beide Störungen getrennt betrachtet und danach im hier erstmals untersuchten Fall des toroidalen Taperhohlleiters überlagert. Strukturen dieser Art mit geringer Modenkonversion findet man u.a. in der Hohlleiterschaltungstechnik als schwach inhomogener Übergang zwischen zwei homogenen Raumteilen oder als Speiseleitung einer Mikrowellenantenne.

Aufgrund des sich nur langsam ändernden Hohlleiterverlaufs können, ausgehend von den Eigenwellen des Rundhohlleiters, verschiedene mathematische Näherungsverfahren verwendet werden. Im Taper benutzt man eine verbesserte adiabatische Modentheorie, während für den Toroid eine Störungsrechnung nach *Rayleigh* und *Schrödinger* bevorzugt wird. Alle dadurch hergeleiteten Korrekturterme können als geschlossene Ausdrücke angegeben werden. Im toroidalen Taper wird eine lineare Superposition der Feldlösungen für Taper bzw. Toroid durchgeführt.

Als Verallgemeinerung der bestehenden Theorie könnten einige andere geometrische Störungen der Zylindersymmetrie ebenfalls berücksichtigt werden. Man könnte eine ungleichförmige Achskrümmung, Ondulierungen oder Torsion betrachten. Genauso wäre die Untersuchung von inhomogenen Hohlleitern mit Impedanzrandbedingungen oder auch mit Plasmafüllung von besonderem Interesse.

7 Erklärung der wichtigsten Formelzeichen

\vec{A}	Vektorpotential
A_i, B_i	Airy-Funktionen
a	Querschnittsradius
b_E	mittlere Energiebeschleunigung
$c_{\nu\mu}$	Entwicklungskoeffizient
\vec{E}	elektrischer Phasor
F	bikomplexe Toroidfeldstärke

f_1, f_2, f_3	Produktfunktionen nach Bernoulli
\vec{H}	magnetischer Phasor
h	toroidaler Metrikkoeffizient
$J_m(K, \rho)$	gewöhnliche Besselfunktion
i, j	imaginäre Einheit ($=\sqrt{-1}$)
j_{mn}	Nullstelle der Besselfunktion $J_m(x)$
K	radiale Wellenzahl
k	Wellenzahl ($=\omega\sqrt{\mu\epsilon}$)
k_z	Ausbreitungskonstante
L	komplexer Störungsoperator
L_1, L_2	Störungsoperatoren
\vec{P}	zeitgemittelte Energiestromdichte
R	Toruskrümmungsradius
s	Bogenlänge
v_E	mittlere Energiegeschwindigkeit
Z	Feldwellenwiderstand des freien Raums
z_c	z -Koordinate des Grenzquerschnitts
α	toroidaler Winkel
β	Ausbreitungskonstante
γ	Koppelkoeffizient (Taper) bzw. Abkürzung (Toroid)
δ	normiertes Radienverhältnis
ξ	normierte radiale Koordinate
ρ	radiale Koordinate
φ	azimutaler Winkel

An dieser Stelle sei den Herren Prof. Dr.-Ing. G. Piefke (TH Darmstadt), Dr. rer. nat. E. Lüneburg (DFVLR Oberpfaffenhofen), Prof. Dr. phil. B. Schnizer (TU Graz) und Prof. Dr. L. B. Felsen (Polytechnic Institute of New York) für wertvolle Diskussionsbeiträge herzlich gedankt. Ihre Anregungen waren bei den Berechnungen eine große Hilfe.

Mitteilung aus dem Institut für Hochfrequenztechnik der Deutschen Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt, Oberpfaffenhofen.

Manuskripteingang: 27. Juli 1987

Literatur

- [1] Sporleder, F.; Unger, H.-G.: Waveguide tapers transitions and couplers. Stevenage: P. Peregrinus, 1979
- [2] Unger, H.-G.: Elektromagnetische Theorie für die Hochfrequenztechnik II. Heidelberg: Hüthig, 1981
- [3] Jackson, J. D.: Klassische Elektrodynamik. Berlin: de Gruyter, 1983
- [4] Morse, P. M.; Feshbach, H.: Methods of theoretical physics. Part I. New York: McGraw-Hill, 1953
- [5] Born, M.; Oppenheimer, R.: Zur Quantentheorie der Molekeln. Ann. d. Phys. 84 (1927) S. 457–484
- [6] Arnold, J. M.; Felsen, L. B.: Ray invariants, plane wave spectra and adiabatic modes for tapered dielectric waveguides. Radio Science 19 (1984) S. 1256–1264
- [7] Felsen, L. B.; Marcuvitz, N.: Radiation and scattering of waves. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1973
- [8] Langer, R. E.: On the connection formulas and the solutions of the wave equation. Phys. Rev. 51 (1937) S. 669–676

- [9] Abramowitz, M.; Stegun, I. A.: Handbook of mathematical functions. New York: Dover, 1972
- [10] Kark, K. W.: Theoretische Untersuchungen zur Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in schwach inhomogenen Hohlleitern. Diss. D17, TH Darmstadt, Fakultät für Elektrotechnik, 1987
- [11] Pierce, A. D.: Extension of the method of normal modes to sound propagation in an almost-stratified medium. J. Acoust. Soc. Amer. 37 (1965) S. 19–27
- [12] Borgnis, F.: Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Energie monochromatischer elektromagnetischer Wellen in dielektrischen Medien. Z. f. Phys. 117 (1941) S. 642–650
- [13] Schrödinger, E.: Quantisierung als Eigenwertproblem. Ann. d. Phys. 80 (1926) S. 437–490
- [14] Jouguet, M.: Les effets de la courbure sur la propagation des ondes électromagnétiques dans les guides a section circulaire. Câbles et Transmission 1 (1947) S. 133–153
- [15] Lewin, L.: A decoupled formulation of the vector wave equation in orthogonal curvilinear coordinates, with application to ferrite-filled and curved waveguides of general cross section. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-20 (1972) S. 338–342
- [16] Brambilla, M.; Finzi, U.: Electro-magnetic eigenmodes of the toroidal cavity. IEEE Trans. Plasma Sci. PS-2 (1974) S. 112–114
- [17] Cap, F.: Some remarks on toroidal problems. Beitr. Plasma-physik 18 (1978) S. 207–217
- [18] Lileg, J.; Schnizer, B.; Keil, R.: Perturbation theoretic computation of toroidally uniform modes within an empty torus. AEÜ 37 (1983) S. 359–365
- [19] Schupfer, N.: Axialsymmetrische elektromagnetische Eigenschwingungen von plasmagefüllten toroidalen Resonatoren. Diss. Univ. Innsbruck, 1985
- [20] Weston, V. H.: Toroidal wave functions. Quart. of App. Math. 16 (1958) S. 237–257
- [21] Birkhoff, G.; Mac Lane, S.: A survey of modern algebra. New York: MacMillan Co., 1953
- [22] Janssen, W.: Hohlleiter und Streifenleiter. Heidelberg: Hüthig, 1977
- [23] Greving, G.: Eine Methode zur numerischen Berechnung räumlicher Feldlinien. AEÜ 28 (1974) S. 310–313

Der Autor



Dr.-Ing. Klaus Werner Kark (26), VDE/ITG, studierte von 1979 bis 1984 Nachrichtentechnik an der Technischen Hochschule Darmstadt. Seit 1984 ist er wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Gruppe Elektrodynamik der Abteilung Hochfrequenzphysik innerhalb des Instituts für Hochfrequenztechnik der Deutschen Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt in Oberpfaffenhofen. 1987 promovierte er mit Auszeichnung an der Technischen Hochschule Darmstadt zum Dr.-Ing. und erhielt für seine Arbeiten den „Hugo-Denkmeier-Preis“ der DFVLR. Er beschäftigt sich mit Problemen der Beugungs- und Streutheorie.