

Störungstheoretische Berechnung elektromagnetischer Eigenwellen im torusförmigen Hohlleiter

von
K.W. Kark

DFVLR, Institut für Hochfrequenztechnik
D-8031 Oberpfaffenhofen

Zusammenfassung

Es wird die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in verlustfreien inhomogenen Hohlleitern mit Kreisquerschnitt und konstanter, ebener Krümmung der Längsachse behandelt.

Die exakte Lösung der Maxwellgleichungen im Toruswellenleiter kann unter Berücksichtigung der Randbedingungen nicht angegeben werden. Für Tori mit nur schwacher Krümmung können die Feldgleichungen jedoch näherungsweise analytisch gelöst werden. Mit Hilfe der aus der Quantenmechanik wohl bekannten Rayleigh-Schrödingerschen Störungstheorie wird hier das volle Spektrum aller, auch entarteter, Wellentypen mit Eigenwerten und Eigenfunktionen bis zu den Störtermen 1. Ordnung untersucht. Die Krümmung der Hohlleiterlängsachse wird als Störung des geraden Kreiszylinders aufgefaßt und das gestörte Torusfeld nach den Eigenwellen des ungestörten Problems entwickelt. Man erhält für die Feldstärken komplizierte Reihendarstellungen, die sich aber mit Hilfe des Residuensatzes der Funktionentheorie noch geschlossen darstellen lassen.

Abstract

The propagation of electromagnetic waves in a loss free inhomogeneous hollow waveguide with circular cross section and uniform plane curvature of the longitudinal axis is considered.

The exact solution of Maxwell's equations in toruslike waveguides cannot be given with the correct boundary conditions. In a torus with small curvature the field equations can however be solved by means of an analytical approximation method. Using the Rayleigh Schrödinger perturbation theory, well known in quantum mechanics, eigenvalues and eigenfunctions containing first order correction terms are derived for the full spectrum of all modes including the degenerate ones. The curvature of the axis of the waveguide is considered as a disturbance of the straight circular cylinder and the perturbed torus-field is expanded in eigenfunctions of the unperturbed problem. Complicated series expansions are obtained, which can however be represented in closed form by means of the residue theorem and complex integration.

1. Einleitung

Torusförmige Wellenleiter werden in den verschiedensten Bereichen benötigt. Im ehemaligen H_{01} -Hohlkabelprojekt bildete ihre Untersuchung die Grundlage zur Berechnung der unerwünschten $H_{01} \rightarrow E_{11}$ Modenkonzersion bei gekrümmter Übertragungsstrecke [1,2]. In heutiger Zeit hat man mit den modernen dielektrischen Lichtwellenleitern eine analoge Anwendung [3]. Zudem werden Torushohlleiter zur Speisung von Reflektorantennen und als ringförmig geschlossene Resonatoren bei Beschleunigern und Fusionsanlagen eingesetzt [4,5].

Die exakte Lösung der Maxwellgleichungen im Toruswellenleiter durch Überführung in die vektorielle Helmholtz-Gleichung und deren Bernoulli-Separation läßt sich mangels eines geeigneten Koordinatensystems nicht gewinnen [6]. Für Tori mit nur schwacher Krümmung können die Feldgleichungen jedoch näherungsweise analytisch gelöst werden. Durch Einführung einer zweiten komplexen Ebene gelingt eine vollständige Entkopplung der Maxwellgleichungen und man erhält eine skalare inhomogene Wellengleichung für die bikomplexe Feldstärke, deren Lösung mittels Rayleigh-Schrödingerscher Störungstheorie [7,8] als Entwicklung nach Potenzen des inversen Aspektverhältnisses $\delta = a/R$ (a , R kleiner, großer Torusradius) dargestellt werden kann. Die Entwicklungsfunktionen sind die ungestörten Eigenwellen des geraden Kreiszylinders. Es werden hier nur Tori mit uniformer Krümmung $1/R$ und konstantem Querschnittsradius a betrachtet.

Als Erweiterung zu früheren Arbeiten, wo im toroidal uniformen Fall (entkoppelte E- und H-Wellen mit nur je 3 Feldkomponenten) nur die Eigenwerte, diese aber außerordentlich genau, bestimmt wurden [9,10], wird hier das volle Spektrum aller Wellentypen mit Eigenwerten und Eigenfunktionen bis zu den Störtermen 1. Ordnung untersucht. Die hier auf den Torus angewandte Methode liefert für die Feldstärken recht aufwendige

Reihendarstellungen, deren geschlossene Darstellung über eine Polreihentransformation mit Hilfe des Residuensatzes weiter unten angegeben wird.

2. Herleitung einer Wellengleichung

2.1 Das lokale Toruskoordinatensystem (ξ, φ, α)

Das hier beschriebene Verfahren dient zur Berechnung der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in verlustfreien Hohlleitern lokal kreisförmigen Querschnitts mit abschnittsweise konstanter Krümmung. Der gesamte Hohlleiterzug läßt sich, wie in Bild 1 gezeigt, aus einer begrenzten Anzahl separat zu betrachtender Teilstücke zusammensetzen.

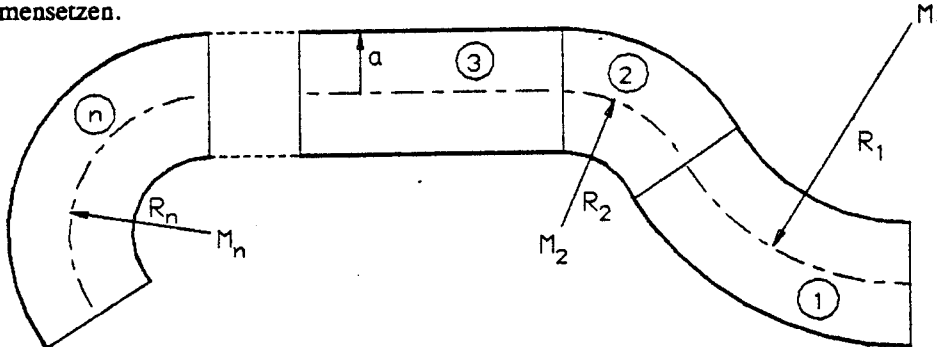


Bild 1. Inhomogener Hohlleiterzug aus n Raumteilen mit konstantem lokalem Kreisquerschnitt und abschnittsweise konstanter Krümmung $1/R_n$.

Die Krümmungsebenen der Teilhohlleiter müssen nicht identisch sein, so daß durch die Zusammenschaltung auch eine helixartige Nettokrümmung im Raum erreicht werden kann. In dieser Arbeit soll nur *ein* gekrümmtes Teilstück aus der Gesamtschaltung betrachtet werden. Im Hohlleiter hin- und rücklaufende Wellen werden getrennt betrachtet; Anregungs- und Reflexionseffekte an den Trennflächen bleiben unberücksichtigt.

Wie in Bild 1 dargestellt, darf die Krümmung auch Null sein ($R_i \rightarrow \infty$). Der gerade Kreiszylinder ergibt sich somit als Grenzfall aus der gekrümmten Struktur. Abweichend von den üblichen Toruskoordinaten [5,11] benutzt man darum zur Darstellung der metallischen Randflächen das lokale Toruskoordinatensystem (Quasitoruskoordinaten), das bei verschwindender Krümmung in das System der bekannten Kreiszylinderkoordinaten übergeht. Aus Bild 2 läßt sich leicht der Zusammenhang zwischen den dimensionslosen lokalen Toruskoordinaten (ξ, φ, α) und den kartesischen Koordinaten (x, y, z) ablesen.

Unter Berücksichtigung der Variablentransformation $q = a\xi$ und $s = R\alpha$ mit q als quasiradialer Länge und s als Bogenlänge entlang der Torusmittellinie gilt [12]

$$\begin{aligned} x &= R h \cos \alpha \\ y &= R h \sin \alpha \\ z &= a \xi \sin \varphi \end{aligned} \quad (1)$$

mit dem Metrikfaktor

$$h = 1 - \delta \xi \cos \varphi \quad (2)$$

und dem inversen Aspektverhältnis

$$\delta = \frac{a}{R} \quad (3)$$

wobei a der kleine bzw. R der große Torusradius ist; φ ist der poloidale und α der toroidale Winkel. Das Torusinnere wird durch Werte $0 \leq \xi \leq 1$ beschrieben.

Nach der Festlegung des Koordinatensystems sollen nun die Maxwellgleichungen in eine der Störungsrechnung zugängliche Form gebracht werden.

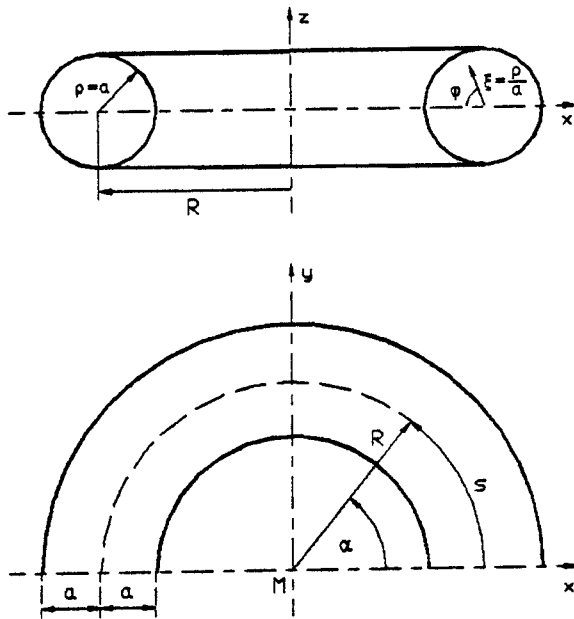


Bild 2. Torus mit Koordinatensystemen : Kartesische Koordinaten (x, y, z) und lokale Toruskoordinaten (ξ, φ, α) bzw. (q, φ, s) als verallgemeinerte Kreiszyylinderkoordinaten.

2.2 Die Feldgleichungen

Aus den Maxwellgleichungen für stationäre Felder in homogenen, isotropen und quellenfreien Medien

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= j\omega\epsilon \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu \vec{H}\end{aligned}\quad (4)$$

eliminiert man zunächst die Transversalfeldstärken. Bei Torushohlleitern mit variabler Krümmung $1/R(s)$ führt diese Umformung auf eine komplizierte Integro-Differentialgleichung [13]. Durch die Beschränkung auf gleichförmig gekrümmte Wellenleiter erhalten die gesuchten Gleichungen für die Longitudinalfelder jedoch eine einfachere Form.

Wegen der Uniformitätsbedingung für Tori konstanter Krümmung ist der Metrifaktor h unabhängig von der Längskoordinate

$$\frac{\partial h(\xi, \varphi)}{\partial \alpha} = 0 \quad (5)$$

Somit erhalten alle Feldkomponenten die exponentielle Abhängigkeit

$$e^{j(\omega t \pm \beta s)} \quad (6)$$

die in den weiteren Rechnungen weggelassen wird. Im folgenden soll nur das negative Vorzeichen im Exponenten benutzt werden. Es repräsentiert Wellen, die sich in die positive s -Richtung ausbreiten. Für die entgegengesetzte Ausbreitungsrichtung ist β durch $-\beta$ zu ersetzen.

Mit den Abkürzungen für die mit dem Metrifaktor h multiplizierten Längsfeldstärken

$$\begin{aligned}H &= h H_s \\ E &= h E_s\end{aligned}\quad (7)$$

erhält man aus den Maxwellgleichungen in lokalen Toruskomponenten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\xi \partial \varphi} + j\beta a H_\varphi &= j\omega \epsilon h a E_Q \\
-j\beta a H_Q - \frac{\partial H}{\partial \xi} &= j\omega \epsilon h a E_\varphi \\
\frac{h \partial (\xi H_\varphi)}{\partial \xi} - \frac{h \partial H_Q}{\partial \varphi} &= j\omega \epsilon \xi a E \\
\frac{\partial E}{\xi \partial \varphi} + j\beta a E_\varphi &= -j\omega \mu h a H_Q \\
-j\beta a E_Q - \frac{\partial E}{\partial \xi} &= -j\omega \mu h a H_\varphi \\
\frac{h \partial (\xi E_\varphi)}{\partial \xi} - \frac{h \partial E_Q}{\partial \varphi} &= -j\omega \mu \xi a H
\end{aligned} \tag{8}$$

nach Elimination der Transversalfelder E_Q , E_φ , H_Q und H_φ eine zu [4] analoge Form, die aber etwas unübersichtlich ist und hier in einer wesentlich kompakteren Operatorschreibweise wiedergegeben werden soll.

$$\begin{aligned}
(L^{(0)} + \lambda) E &= \delta (L_1^s E + L_2^s HZ) \\
(L^{(0)} + \lambda) HZ &= \delta (L_1^s HZ - L_2^s E)
\end{aligned} \tag{9}$$

Die Gleichungen (9) sind die gesuchten gekoppelten Longitudinalgleichungen, deren störungstheoretische Behandlung im Mittelpunkt dieser Arbeit steht. Die Differentialoperatoren bedeuten ausführlich

$$L^{(0)} = \frac{\partial}{\xi \partial \xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2}{\xi^2 \partial \varphi^2} \tag{10}$$

$$L_1^s = \frac{1 + \gamma^2}{h(1 - \gamma^2)} \left(-\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\sin \varphi}{\xi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \tag{11}$$

$$L_2^s = \frac{-2\gamma}{h(1 - \gamma^2)} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\cos \varphi}{\xi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \tag{12}$$

$L^{(0)}$ ist der transversale Laplaceoperator; L_1^s soll im folgenden als Mono-Störoperator und L_2^s als Hybrid-Störoperator bezeichnet werden.

Hierbei finden die dimensionslose Größe $\gamma = \beta/kh$ und der Metrikfaktor $h = 1 - \delta \xi \cos \varphi$ Verwendung. $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ ist die Wellenzahl, $\delta = a/R$ das inverse Aspektverhältnis, das als Entwicklungsparameter in der folgenden Störungsrechnung dienen soll, und

$$\lambda = (ka)^2 (1 - \gamma^2) = (ka)^2 - \frac{(\beta a)^2}{h^2(\xi, \varphi)} \tag{13}$$

ist der *koordinatenabhängige* Eigenwert des Differentialgleichungssystems (9), der sich aus der noch zu bestimmenden Ausbreitungskonstanten β errechnen läßt [14]. E und H sind die gesuchten Querschnittseigenfunktionen und $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ ist der Feldwellenwiderstand des freien Raums und dient zur Normierung.

Der Mono-Störoperator L_1^s verknüpft nur Wellen gleichen Typs miteinander (EE- oder HH- Kopplung), während der Hybridstöroperator L_2^s Wellen verschiedenen Typs miteinander verknüpft (EH- oder HE- Kopplung). Im geschlossenen Torusresonator gibt es den Sonderfall toroidal uniformer Schwingungen ($\partial/\partial \alpha = 0$), für die wegen $\gamma = 0$ der Hybridstöroperator L_2^s nach Gl. (12) verschwindet. Dadurch wird das Differentialgleichungssystem (9) entkoppelt, und man erhält E- bzw. H- Wellen mit nur 3 Feldkomponenten. Die resultierenden entkoppelten Gleichungen stimmen völlig mit den in [9] angegebenen überein. Wie das gekoppelte System (9) zeigt, gibt es im torusförmigen Hohlleiter dagegen nur hybride EH- (quasi-E) bzw. HE- (quasi-H) Wellen mit jeweils 6 Feldkomponenten, deren Bestimmung im nächsten Abschnitt durchgeführt werden soll.

Zunächst allerdings sollen die Feldgleichungen (9) in eine kompaktere Form transformiert werden. Prinzipiell besteht die Möglichkeit, das gekoppelte Differentialgleichungssystem (9) als zwei entkoppelte Einzeldifferenti-

gleichungen 4. Ordnung darzustellen [15]. Um deren außerordentlich schwierige Behandlung zu umgehen, führt man eine bikomplexe Feldfunktion F ein. Unter Zuhilfenahme einer zweiten komplexen Ebene durch die Transformation [16,17]

$$F = E + i ZH \quad (14)$$

erhält man aus den Feldgleichungen (9) eine skalare inhomogene Wellengleichung für die neue bikomplexe Feldstärke

$$(L^{(0)} + \lambda) F = \delta L^s F \quad (15)$$

mit dem neuen Störoperator

$$L^s = L_1^s - i L_2^s \quad (16)$$

Die mit Gl. (14) eingeführte i -komplexe Ebene ist streng zu trennen von der j -komplexen Ebene, die zur eleganten Darstellung der Zeitabhängigkeit ($\cos \omega t \rightarrow e^{j\omega t}$) in Form von komplexen Amplituden für die Feldstärken üblicherweise benutzt wird. Es gilt [13]

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ j^2 &= -1 \quad \text{aber} \\ ij &\neq -1 \end{aligned} \quad (17)$$

Die bikomplexe Darstellung ließe sich zwar mit Hilfe der in der Quantenmechanik gebräuchlichen zweidimensionalen Paulischen Spinmatrizen über eine Quaternionengruppe noch weiter formalisieren [18,19,20], eine konsequente Unterscheidung der beiden imaginären Einheiten i und j genügt aber für unsere Zwecke vollauf. Eine Aufspaltung des hypothetischen Feldes F in die physikalischen Größen E und H ist durch Real- bzw. Imaginärteilbildung in der i -komplexen Ebene ohnehin leicht wieder möglich.

In anderen Arbeiten zum Torusproblem [5,13] werden Formen der bikomplexen Entkopplung der Feldgleichungen benutzt, die sich von der unseren in Gl. (14) unterscheiden. Darauf soll hier aber nicht näher eingegangen werden. Im nächsten Abschnitt wird nun die störungstheoretische Behandlung der inhomogenen bikomplexen Wellengleichung (15) näher erläutert.

3. Störungstheoretische Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen

Die Grundidee zur Lösung unserer inhomogenen Wellengleichung (15) besteht darin, die Krümmung als Störung des Hohlleiters mit gerader Achse aufzufassen. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen im Torus müssen sich demnach stetig bei wachsender Störung ($\delta > 0$) aus den Lösungen der homogenen Differentialgleichung ($\delta = 0$) ergeben. Die gestörten Eigenfunktionen kann man somit als Entwicklung nach Potenzen des inversen Aspektverhältnisses $\delta = a/R$ darstellen. Die Entwicklungskoeffizienten sind Linearkombinationen der ungestörten Eigenwellen des geraden Kreiszylinders. In dieser Arbeit sollen nur Tori mit schwacher Krümmung ($0 \leq \delta \ll 1$) betrachtet werden, sodaß die gesuchten Entwicklungen schon nach dem linearen Term δ abgebrochen werden dürfen. Eine vorzügliche Darstellung der hier angewandten Rayleigh-Schrödinger Störungstheorie 1. Ordnung findet man in [8].

3.1 Die homogene Wellengleichung

Im geraden Kreiszylinder reduziert sich unsere Wellengleichung (15) wegen $\delta = 0$ auf

$$(L^{(0)} + \lambda^{(0)}) F^{(0)} = 0 \quad (18)$$

Dieses Eigenwertproblem ist direkt lösbar. Man findet leicht die bekannten E_{mn} - und H_{mn} -Eigenwellen mit jeweils 5 Feldkomponenten, die ein vollständiges Orthogonalsystem bilden. Faßt man die Doppelindizes zu

einem einzigen Modenindex zusammen, so erhält man aus (18), der folgenden Normierungsbedingung (19) mit dem Kronecker- δ , wobei $F_\mu^{(0)}$ in der i-komplexen Ebene zu konjugieren ist,

$$\int_{\xi=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} F_\nu^{(0)} F_\mu^{(0)*} d\varphi \xi d\xi = \delta_{\nu\mu} \quad (19)$$

und den Randbedingungen

$$\begin{aligned} F_\nu^{(0)} &= 0 & \text{bei } E_{mn} - \text{Wellen} \\ \frac{\partial F_\nu^{(0)}}{\partial \xi} &= 0 & \text{bei } H_{mn} - \text{Wellen} \end{aligned} \quad (20)$$

die ungestörten Eigenfunktionen

$$F_\nu^{(0)} = \frac{1}{N_\nu} J_m(\tau_\nu \xi) \Phi_m(\varphi) \quad (21)$$

mit ihren Eigenwerten $\lambda_\nu^{(0)} = \tau_\nu^2$, wobei sich der Querschnittseigenwert als Nullstelle der Besselfunktion bzw. deren Ableitung ergibt

$$\tau_\nu = \begin{cases} j_{mn} & \text{bei } E_{mn} - \text{Wellen} \\ j_{mn}' & \text{bei } H_{mn} - \text{Wellen} \end{cases} \quad (22)$$

mit $m = 0, 1, 2, \dots$ und $n = 1, 2, 3, \dots$. Die Normierungskonstante ist

$$N_\nu = \begin{cases} J_m'(j_{mn}) \sqrt{\frac{\pi}{2} (1 + \delta_{m0})} & \text{bei } E_{mn} - \text{Wellen} \\ -i J_m(j_{mn}') \sqrt{\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{m^2}{j_{mn}'^2}\right) (1 + \delta_{m0})} & \text{bei } H_{mn} - \text{Wellen} \end{cases} \quad (23)$$

Die azimutale ($\triangleq$ poloidale) Feldabhängigkeit wird durch trigonometrische Funktionen beschrieben

$$\Phi_m(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \quad (24)$$

Jede E_{mn} - bzw. H_{mn} - Welle ist zweifach entartet, weil es Moden mit symmetrischem oder antisymmetrischem Feldbild bezüglich der x-y- Ebene (siehe Bild 2) gibt. Entartungen treten bei Eigenwertproblemen immer dann auf, wenn verschiedene Eigenfunktionen gleiche Eigenwerte besitzen. Man beachte, daß für $m = 0$ nur ein gerader Modenansatz mit dem cos in Gl. (24) sinnvoll ist, weil sonst alle Feldkomponenten verschwinden würden. Es soll an dieser Stelle auch gleich auf die $H_{0n} \leftrightarrow E_{1n}$ Entartung hingewiesen werden, die wegen $j_{0n}' = j_{1n}$ auftritt, und deren störungstheoretische Behandlung separat zu erfolgen hat. Zunächst jedoch soll nun die Störung auf alle nicht entarteten Eigenwellen bestimmt werden.

3.2 Nicht entartete Rayleigh-Schrödinger Störungstheorie 1. Ordnung

Für die Symmetrieentartung im Querschnitt des ungestörten geraden Kreiszylinders kann man die kompliziertere Störungstheorie für entartete Eigenfunktionen vermeiden, wenn man symmetrische bzw. antisymmetrische Moden jeweils für sich getrennt betrachtet. Jede ungestörte Eigenwelle mit 5 Feldkomponenten geht bei Hinzukommen der Störung (Krümmung der Längsachse) stetig in einen Torusmode mit 6 Feldkomponenten und gleicher Transversalsymmetrie über. Diese neuen Toruseigenwellen sind leider nicht geschlossen darstellbar; sie lassen sich aber durch Reihenentwicklungen approximieren. Bei nur schwacher Störung ($\delta \ll 1$) wird bei allen nicht entarteten Eigenwellen der Feldbildcharakter nur gering verändert. Man hat im wesentlichen weiterhin TM- und TE- Moden mit nur schwacher Anregung der bislang fehlenden zweiten Longitudinalkomponente. Die Modenbezeichnung der Toruswellen kann deshalb analog zum geraden Kreiszylinder gewählt wer-

den [21]; man erhält dann Hybridwellen mit 6 Feldkomponenten, die als quasi-E- (EH-) und quasi-H- (HE-) Wellen bezeichnet werden [4].

Zur Lösung von Gl. (15) macht man nun mit (siehe Gl. (13))

$$\lambda_\nu = (ka)^2 - \frac{\eta_\nu}{h^2} \quad (25)$$

und der Abkürzung

$$\eta_\nu = (\beta_\nu a)^2 \quad (26)$$

einen linearen Störungsansatz für die bikomplexe Feldfunktion und deren normierte Ausbreitungskonstante zum Quadrat

$$\begin{aligned} F_\nu &= F_\nu^{(0)} + \delta F_\nu^{(1)} \\ \eta_\nu &= \eta_\nu^{(0)} + \delta \eta_\nu^{(1)} \end{aligned} \quad (27)$$

mit $F_\nu^{(0)}$ wie in Gl. (21) als E_{mn} - oder H_{mn} - Welle des geraden Kreiszylinders sowie

$$\eta_\nu^{(0)} = (ka)^2 - \tau_\nu^2 \quad (28)$$

Mit

$$\beta_\nu = \beta_\nu^{(0)} + \delta \beta_\nu^{(1)} \quad (29)$$

findet man leicht aus den Gln. (26) und (27) die Störung der Ausbreitungskonstanten

$$\beta_\nu^{(1)} a = \frac{\eta_\nu^{(1)}}{2\sqrt{\eta_\nu^{(0)}}} \quad (30)$$

Das Störfeld $F_\nu^{(1)}$ und die Änderung der Ausbreitungskonstanten $\eta_\nu^{(1)}$ sollen bestimmt werden. Durch Einsetzen von Gl. (27) in die inhomogene Wellengleichung (15) erhält man nach Vernachlässigen aller Glieder 2. Ordnung in δ und Beachtung der homogenen Wellengleichung (18) eine Dgl. zur Bestimmung der Störung

$$L^{(0)} F_\nu^{(1)} - \hat{L}^s F_\nu^{(0)} = -\tau_\nu^2 F_\nu^{(1)} + \eta_\nu^{(1)} F_\nu^{(0)} \quad (31)$$

mit

$$\hat{L}^s = L^s + 2\eta_\nu^{(0)} \xi \cos \varphi \quad (32)$$

Mit Hilfe einer Entwicklung des Störfeldes $F_\nu^{(1)}$ nach ungestörten Eigenfunktionen [8] bei zunächst noch unbekannten Entwicklungskoeffizienten $c_{\nu\mu}$

$$F_\nu^{(1)} = \sum_\mu c_{\nu\mu} F_\mu^{(0)} \quad (33)$$

und der Orthonormalitätsrelation (19) ergibt sich nach kurzer Rechnung folgendes Ergebnis

$$\begin{aligned} \eta_\nu &= \eta_\nu^{(0)} - \delta \hat{W}_{\nu\nu} \\ F_\nu &= F_\nu^{(0)} + \delta \sum_{\mu \neq \nu} \frac{\hat{W}_{\mu\nu}}{\tau_\nu^2 - \tau_\mu^2} F_\mu^{(0)} \end{aligned} \quad (34)$$

mit den Koppelintegralen in Skalarproduktform

$$\hat{W}_{\mu\nu} = \left(F_{\mu}^{(0)}, \hat{L}^s F_{\nu}^{(0)} \right) = \int_{\xi=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} F_{\mu}^{(0)*} \hat{L}^s F_{\nu}^{(0)} d\varphi d\xi \quad (35)$$

wobei die Summe in Gl.(34) über alle μ außer $\mu = \nu$ zu erstrecken ist, was aus der Normierungsbedingung für die gestörte Eigenfunktion $(F_{\nu}, F_{\nu}) = 1$ sofort folgt. ν ist hier der Modenindex einer nicht entarteten Eigenwelle; μ darf auch eine entartete H_{0q} - oder E_{1q} - Welle kennzeichnen [22].

Eine ausführlichere Darstellung zur Bestimmung der gestörten Lösung findet man in zahlreichen Büchern der Mathematischen Physik, speziell der Quantenmechanik [22,23,24,25,26]. Die 2. Gleichung der Beziehung (34) läßt sich auch in einer übersichtlichen Heisenbergschen Matrixdarstellung angeben [26]

$$(F) = (I + \delta(c_{\nu\mu})) (F^{(0)}) \quad (36)$$

mit der Einheitsmatrix I , den Spaltenvektoren (F) und $(F^{(0)})$ aus gestörten und ungestörten Eigenfunktionen und der Koppelmatrix $(c_{\nu\mu})$ mit einer Hauptdiagonalen aus Nullen.

Recht mühsam aber unschwierig gestaltet sich die Bestimmung der Koppelintegrale $\hat{W}_{\mu\nu}$. Es sind langwierige Quadraturen über trigonometrische und Zylinderfunktionen durchzuführen, wobei man eine vierfache Fallunterscheidung treffen muß, weil μ oder ν jeweils eine E_{mn} - oder auch eine H_{pq} - Welle kennzeichnen kann. $\hat{W}_{\mu\nu}$ soll hier in der Kürze nicht explizit angegeben werden; es zeigt sich aber, daß zur Berechnung der Störung in 1. Ordnung $O(\delta)$ auf die Eigenfunktion F_{ν} mit $\nu \triangleq mn$ die Störreihe in Gl. (34) wegen der φ -Integration in Gl. (35) nur über solche $\mu \triangleq pq$ zu erstrecken ist, für die $p = m \pm 1$ gilt. Die Summe über alle $\mu \neq \nu$, die eigentlich eine Doppelsumme über alle p und q mit $\tau_{pq} \neq \tau_{mn}$ ist, reduziert sich demnach auf eine Einfachsumme über alle $q = 1, \dots, \infty$ mit festem p . Insbesondere wird deswegen

$$\hat{W}_{\nu\nu} = 0 \quad (37)$$

was bedeutet, daß sich die Ausbreitungskonstanten aller im runden Hohlleiter nicht entarteter Eigenwellen im Toruswellenleiter in 1. Ordnung nicht ändern. Bei Hinzukommen der Störung ändert sich zwar das Feldbild, aber jede Welle breitet sich mit der gleichen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit aus, wie im geraden ungestörten Hohlleiter.

3.3 Entartete Rayleigh-Schrödinger Störungstheorie 1. Ordnung

Das einzig Neue an der entarteten Störungstheorie ist es, diejenigen Linearkombinationen der ungestörten entarteten Eigenfunktionen zu finden, die sich stetig aus den gestörten Eigenfunktionen bei Wegfall der Störung ergeben. Am Ende läuft dies auf eine Diagonalisierung (Hauptachsentransformation) einer quadratischen Form hinaus (siehe in [8] S. 447/456). Es gibt einen unendlichen Satz von jeweils paarweise entarteten Eigenwellen. Für $n = 1, \dots, \infty$ hat man mit

$$\tau_n = j_{0n}' = j_{1n} \quad (38)$$

folgende entarteten Eigenfunktionspaare

$$\begin{aligned} F_{H_{0n}}^{(0)} &= \frac{i}{\sqrt{\pi} J_0(\tau_n)} J_0(\xi \tau_n) \\ F_{E_{1n}}^{(0)} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} J_1'(\tau_n)} J_1(\xi \tau_n) \left\{ \begin{array}{c} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

Als Abkürzung wollen wir vereinbaren, die in Bezug zur Toruskrümmungsebene (siehe Bild 2) symmetrische Feldfunktion ($\propto \cos \varphi$) als E_{1n}' -Welle und die antisymmetrische ($\propto -\sin \varphi$) als E_{1n}'' -Welle zu bezeichnen.

Für ein Modenpaar mit festem Index n bildet man nun nach [8] eine zunächst noch unbekannte orthogonale Substitution, wobei der Modenindex n zur besseren Übersichtlichkeit in Zukunft weggelassen wird

$$F^{(0)} = b_1 F_{H_{0a}}^{(0)} + b_2 F_{E_{1a}}^{(0)} \quad (40)$$

$F^{(0)}$ soll die Normierungsbedingung (19) erfüllen; man erhält daraus eine erste Amplitudenbeziehung der beiden gesuchten i-komplexen Konstanten

$$|b_1|^2 + |b_2|^2 = 1 \quad (41)$$

Auch hier ist wie in Gl. (19) der Betrag in der i-komplexen Ebene zu nehmen. Für unsere gesuchte orthogonale Substitution (40) macht man nun exakt den gleichen Störungsansatz wie im nicht entarteten Fall (27) und erhält analog zur Gl. (31) folgende Differentialgleichung

$$L^{(0)} F^{(1)} - \hat{L}^s F^{(0)} = -\tau_n^2 F^{(1)} + \eta^{(1)} F^{(0)} \quad (42)$$

mit τ_n wie in Gl. (38). Gesucht sind wiederum $F^{(1)}$ und $\eta^{(1)}$ sowie zusätzlich die Konstanten b_1 und b_2 . Die Gln. (25) bis (35) finden auch im entarteten Fall ihre analoge Entsprechung. Man entwickelt auch hier die Störung nach den ungestörten Eigenfunktionen

$$F^{(1)} = \sum_{\mu} c_{\mu} F_{\mu}^{(0)} \quad (43)$$

Mit diesem Ansatz geht man in die Differentialgleichung (42) und nutzt auch hier die Orthonormalitätsrelation (19) der ungestörten Eigenfunktionen. Man findet dann folgende Beziehungen [23], wobei hier schon einige Koppelintegrale aus (35) zur Vereinfachung eingearbeitet wurden

$$\begin{bmatrix} -\eta^{(1)} & \hat{W} \\ \hat{W} & -\eta^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (44)$$

und

$$c_{\mu} = \frac{(F_{\mu}^{(0)}, \hat{L}^s F^{(0)})}{\tau_n^2 - \tau_{\mu}^2} \quad (45)$$

für μ derart, daß gilt $\tau_{\mu} \neq \tau_n$. Mit

$$\hat{W} = (F_{E_{1a}}^{(0)}, -iL_2^s F_{H_{0a}}^{(0)}) \quad (46)$$

besitzt das homogene Gleichungssystem (44) nur dann eine nicht triviale Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Aus der so gewonnenen Eigenwertgleichung (Säkulargleichung) erhält man eine quadratische Bestimmungsgleichung für die Störung $\eta^{(1)}$. Mit dem berechneten Koppelintegral

$$\hat{W} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} ka \sqrt{\eta^{(0)}}}{\tau_n} & \text{für die } E_{1n}'' - \text{Welle} \\ 0 & \text{für die } E_{1n}' - \text{Welle} \end{cases} \quad (47)$$

erhält man aus der Säkulargleichung $\eta^{(1)}$ und mit Hilfe von Gl. (30) die Störung der Ausbreitungskonstanten $\beta^{(1)}$. Man findet dadurch

$$\beta a = \begin{cases} \beta^{(0)} a \pm \delta \frac{ka}{\sqrt{2} \tau_n} & \text{für die } E_{1n}'' - \text{Welle} \\ \beta^{(0)} a & \text{für die } E_{1n}' - \text{Welle} \end{cases} \quad (48)$$

mit $\beta^{(0)} a = \sqrt{(ka)^2 - \tau_n^2}$.

Aus dem System (44) läßt sich sodann das Verhältnis b_1/b_2 herleiten, mit dem b_1 und b_2 aus der Normierungsbedingung (41) bis auf einen unwichtigen Phasenfaktor bestimmt werden können, also

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{\hat{W}}{\eta^{(1)}} = \pm 1 \quad . \quad (49)$$

Für die E_{1n}' -Welle lassen sich keine Verhältnisse b_1/b_2 ableiten. Ein hybrider Wellenansatz wie in Gl. (40) ist hier physikalisch nicht sinnvoll. Somit ist die symmetrische E_{1n}' -Welle quasi-stabil. Sie koppelt nicht entartet mit den H_0 Wellen, und darum bleiben die Rechnungen der nicht entarteten Störungstheorie für sie anwendbar. Das bedeutet, die E_{1n}' -Welle koppelt in 1. Näherung mit E_0 , E_2' und H_2'' Wellen aber nicht mit H_0 Wellen (siehe auch [1]).

Im Gegensatz dazu ist bei der antisymmetrischen E_{1n}'' -Welle der Formalismus der entarteten Störungsrechnung anzuwenden. Sie koppelt stark (selbst bei geringster Krümmung) mit der H_{0n} -Welle in einem entarteten Hybridwellenpaar. Wegen der zwei möglichen Vorzeichen für die Störung der Ausbreitungskonstanten $\beta^{(1)}$ erhält man auch zwei Lösungen für das Koeffizientenpaar b_1 und b_2 aus der orthogonalen Substitution (40), was den gesuchten zwei ungestörten Eigenfunktionen entspricht, die sich als Grenzfall bei Wegfall der Störung aus den beiden entarteten Hybridwellenpaaren ergeben. Die neuen ungestörten Eigenfunktionen lauten also bei Berücksichtigung der Gln. (41) und (49)

$$F_{\pm}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (F_{H_{0n}}^{(0)} \pm F_{E_{1n}''}^{(0)}) \quad . \quad (50)$$

Damit können auch die Entwicklungskoeffizienten (45) der Eigenfunktionsstörung (43) für ein festes n berechnet werden. Für die Koppelintegrale sind wiederum mehrere Fallunterscheidungen zu treffen, was hier aber im einzelnen nicht gezeigt werden kann.

Zusammenfassend erhält man nun mit $F_{\mu}^{(0)}$ wie in Gl. (21) die gestörten Eigenfunktionen im n -ten entarteten Hybridpaar

$$F_{\pm} = F_{\pm}^{(0)} + \delta \sum_{\tau_{\mu} \neq \tau_n} \frac{(F_{\mu}^{(0)}, \hat{L}^s F_{\pm}^{(0)})}{\tau_n^2 - \tau_{\mu}^2} F_{\mu}^{(0)} \quad . \quad (51)$$

Die entarteten Eigenfunktionen der transformierten Basis (50) erleben bei Hinzukommen der Störung eine 'Niveaufspaltung'; die Entartung wird somit aufgehoben. Die gestörte F_+ Welle erhält nach Gl. (48) eine vergrößerte Ausbreitungskonstante, die F_- Welle eine verkleinerte. Somit ergeben sich auch veränderte Ausbreitungsgeschwindigkeiten der aufgespaltenen Wellen. In Relation zu der ungestörten Phasen- und Gruppengeschwindigkeit im runden Hohlleiter erhält man im Torus für die F_+ Welle

$$\begin{aligned} v_p &= v_p^{(0)} \left[1 \mp \frac{\delta}{\sqrt{2} \tau} \frac{v_p^{(0)}}{c} \right] \\ v_g &= v_g^{(0)} \left[1 \mp \frac{\delta}{\sqrt{2} \tau} \frac{v_g^{(0)}}{c} \right] \end{aligned} \quad (52)$$

mit (siehe in [27])

$$v_p^{(0)} = \frac{\omega}{\beta^{(0)}} \quad , \quad v_g^{(0)} v_p^{(0)} = c^2 \quad (53)$$

und der Lichtgeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad . \quad (54)$$

Eine Untersuchung der Energiegeschwindigkeit v_E soll in einer späteren Arbeit erfolgen. Zunächst wird im folgenden Abschnitt eine geschlossene Darstellung für die Feldstärken der Toruswellen angegeben.

4. Die Feldstärken im Torus

Ausgehend von den bisher hergeleiteten Reihendarstellungen für die Eigenfunktionsstörungen, die hier aus Platzgründen nicht explizit angegeben werden können, soll nun der Weg skizziert werden, wie man geschlossene Ausdrücke für die Torusfeldstärken gewinnen kann.

4.1 Reihendarstellungen

Die Doppelsummen über alle $\mu \triangleq pq$ mit $q = 1, \dots, \infty$ in den Gln. (34) und (51) lassen sich in endliche Einfachsummen mit nur zwei Summanden für $p = m \pm 1$ überführen. Die inneren Störreihen über alle q können allgemein folgende zwei Formen annehmen

$$\begin{aligned} S_E &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{j_{pq}}{(\tau_\nu^2 - j_{pq}^2)^\psi} \frac{J_p(\xi j_{pq})}{J_p'(j_{pq})} \\ S_H &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(j_{pq'})^\chi}{(\tau_\nu^2 - j_{pq'}^2)^\psi (j_{pq'}^2 - p^2)} \frac{J_p(\xi j_{pq'})}{J_p(j_{pq'})} \end{aligned} \quad (55)$$

mit τ , wie in Gl. (22) und den Exponenten $\psi = 2$ oder 3 sowie $\chi = 2$ oder 4 . Eine geschlossene Darstellung der Reihen (55) gelingt mit Hilfe folgender komplexer Funktionen

$$\begin{aligned} g_E(z) &= \frac{z}{(\tau_\nu^2 - z^2)^\psi} \frac{J_p(\xi z)}{J_p(z)} \\ g_H(z) &= \frac{z^{\chi-2}}{(\tau_\nu^2 - z^2)^\psi} \frac{J_p(\xi z)}{J_p'(z)} \end{aligned} \quad (56)$$

wobei die hier benutzte komplexe Ebene $z = x + iy$ mit den beiden in Abschnitt 2.2 eingeführten komplexen Ebenen nichts zu tun hat. Betrachtet man nun ein Schleifenintegral wie in Bild 3, so erhält man für die Integranden $g_E(z)$ bzw. $g_H(z)$ aus Gl. (56) nach dem Residuensatz der Funktionentheorie [28]

$$\int_C g(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}\{g(z_k)\} \quad (57)$$

an den isolierten Singularitäten z_k . Die Integranden sind antisymmetrisch auf der imaginären Achse ($z = \pm iy$). Somit verschwindet das Integral von P_1 nach P_2 . Wegen des Jordanschen Lemmas [28] liefert auch das Halbkreisintegral keinen Beitrag, und man erhält durch Auftrennen der Residuensumme (57) nach Berechnung der Residuen an den Nullstellen der Besselfunktionen im Nenner eine einfache Darstellung der gesuchten Polreihen (55) (siehe auch in [9])

$$S_E = -\text{Res}\{g_E(z)\}_{z=\tau_\nu}, \quad S_H = \text{Res}\{g_H(z)\}_{z=\tau_\nu} \quad (58)$$

Die Bestimmung der Residuen in den Gln. (58) an den Polen der Ordnung ψ ist unschwierig aber recht langwierig und mühsam. Die so gefundenen geschlossenen Darstellungen für die Polreihen S_E und S_H aus Gl. (55) können hier nicht explizit wiedergegeben werden. Sie werden im weiteren Rechengang für die Störreihen (34) und (51) in die Felddarstellungen eingesetzt, deren endgültige Form im nächsten Abschnitt angegeben wird.

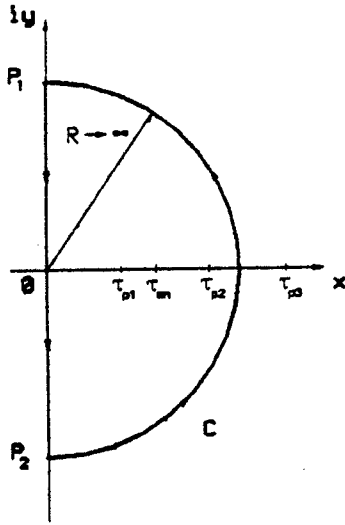


Bild 3. Residuenintegral zur Polreihentransformation.

4.2 Geschlossene Lösungen 1. Ordnung

Durch Aufspalten der bikomplexen Feldfunktion (14) nach Real- und Imaginärteil in der i -komplexen Ebene erhält man die j -komplexen Amplituden der physikalisch relevanten Feldstärken. Im folgenden sollen nun die gestörten Eigenfunktionen der mit dem Metrikfaktor h multiplizierten Longitudinalfeldstärken (7) angegeben werden. Die entsprechenden Transversalfelder lassen sich durch einfache Differentiation aus dem System der Maxwellgleichungen (8) leicht finden.

4.2.1 EH-Wellen (nicht entartete Theorie)

Die folgenden Felddarstellungen gelten für jede hybride EH_{mn} - (quasi-E-) Toruswelle, die aus einer Störung auf eine nicht entartete E_{mn} -Eigenwelle des runden Hohlleiters entstanden ist, einschließlich der E_{1n}' -Welle aber mit Ausnahme der E_{1n}'' -Welle.

$$E = \frac{1}{N_{mn}^E} J_m(j_{mn}\xi) \Phi_m - \frac{\delta}{2j_{mn}^2 N_{mn}^E} \left\{ (2(ka)^2 - j_{mn}^2) \xi J_m(j_{mn}\xi) \cos \varphi \Phi_m + (\beta_{mn}^E a)^2 \left[\frac{m}{\xi} J_m(j_{mn}\xi) (1 + \xi^2) \sin \varphi \Phi_m' - j_{mn} J_m'(j_{mn}\xi) (1 - \xi^2) \cos \varphi \Phi_m \right] \right\} \quad (59)$$

$$ZH = - \frac{\delta ka \beta_{mn}^E a}{j_{mn}^2 (m^2 - 1) N_{mn}^E} \left\{ j_{mn} J_m'(j_{mn}\xi) [m \cos \varphi \Phi_m' + \sin \varphi \Phi_m] + \frac{1}{\xi} J_m(j_{mn}\xi) [(\xi^2 + m^2(1 - \xi^2)) \sin \varphi \Phi_m + m \cos \varphi \Phi_m'] \right\} \quad (60)$$

mit dem Normierungsfaktor

$$N_{mn}^E = J_m'(j_{mn}) \sqrt{\frac{\pi}{2}(1 + \delta_{m0})} \quad , \quad (61)$$

der normierten Ausbreitungskonstanten

$$\beta_{mn}^E a = \sqrt{(ka)^2 - j_{mn}^2} \quad (62)$$

und den poloidalen Eigenfunktionen

$$\Phi_m = \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \quad (63)$$

$$\Phi_m' = \begin{cases} -\sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{cases} \quad (64)$$

Für den Spezialfall der E_{1n}' - Welle erhält man für die magnetische Längsfeldstärke

$$ZH = -\frac{\delta ka \beta_{1n}^E}{2j_{1n}^2 N_{1n}^E} \left[\frac{j_{1n}}{2} J_2(j_{1n}\xi) - \xi J_1(j_{1n}\xi) \right] \sin 2\varphi \quad (65)$$

4.2.2 HE-Wellen (nicht entartete Theorie)

Die folgenden Felddarstellungen gelten für jede hybride HE_{mn} - (quasi-H-) Toruswelle, die aus einer Störung auf eine nicht entartete H_{mn} -Eigenwelle des runden Hohlleiters entstanden ist, mit Ausnahme der H_{0n} -Welle.

$$\begin{aligned} ZH = & \frac{1}{N_{mn}^H} J_m(j_{mn}'\xi) \Phi_m + \\ & + \frac{\delta}{2j_{mn}'^2 N_{mn}^H} \left\{ \frac{1}{\xi} J_m(j_{mn}'\xi) \left[((ka)^2 + j_{mn}'^2) (m T_{mn}^{(1)} - \xi^2 \cos \varphi \Phi_m) - \right. \right. \\ & \left. \left. - m ((ka)^2 - j_{mn}'^2) (1 + \xi^2) \sin \varphi \Phi_m' \right] - \right. \\ & \left. - j_{mn}' J_m'(j_{mn}'\xi) \left[((ka)^2 + j_{mn}'^2) T_{mn}^{(2)} - \right. \right. \\ & \left. \left. - ((ka)^2 - j_{mn}'^2) (1 - \xi^2) \cos \varphi \Phi_m \right] \right\} \quad (66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E = & \frac{\delta ka \beta_{mn}^H a}{j_{mn}'^2 N_{mn}^H} \left\{ \frac{j_{mn}'}{m} J_m'(j_{mn}'\xi) \cos \varphi \Phi_m' + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\xi} J_m(j_{mn}'\xi) (1 - \xi^2) \sin \varphi \Phi_m \right\} \quad (67) \end{aligned}$$

mit dem Normierungsfaktor ($m \neq 0$)

$$N_{mn}^H = J_m(j_{mn}') \sqrt{\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{m^2}{j_{mn}'^2} \right)} \quad (68)$$

der normierten Ausbreitungskonstanten

$$\beta_{mn}^H a = \sqrt{(ka)^2 - j_{mn}'^2} \quad (69)$$

und den Abkürzungen

$$T_{mn}^{(1)} = \frac{\Delta_{mn} \sin \varphi \Phi_m' + m \cos \varphi \Phi_m}{\Delta_{mn}^2 - m^2} \quad (70)$$

$$T_{mn}^{(2)} = \frac{\Delta_{mn} \cos \varphi \Phi_m + m \sin \varphi \Phi_m'}{\Delta_{mn}^2 - m^2} \quad (71)$$

sowie

$$\Delta_{mn} = j_{mn}'^2 - m^2 \quad (72)$$

4.2.3 Entartetes Modenpaar $F_{\pm}$

$$\begin{aligned} E_{\pm} = & \mp \frac{1}{N_n} J_1(\tau_n \xi) \sin(\varphi) \pm \\ & \pm \frac{\delta}{4\tau_n^2 N_n} \left\{ (ka)^2 \xi J_1(\tau_n \xi) + \right. \\ & \left. + (\beta_n^{(0)} a)^2 [\tau_n (1 - \xi^2) J_2(\tau_n \xi) + 3 \xi J_1(\tau_n \xi)] \right\} \sin(2\varphi) \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} ZH_{\pm} = & \frac{1}{\sqrt{2} N_n} J_0(\tau_n \xi) - \\ & - \frac{\delta}{4\tau_n^2 N_n} \left\{ (ka)^2 \sqrt{2} \xi J_1'(\tau_n \xi) \cos \varphi + \right. \\ & + (\beta_n^{(0)} a)^2 \sqrt{2} [\tau_n (1 - \xi^2) J_1(\tau_n \xi) + \xi J_1'(\tau_n \xi)] \cos \varphi \pm \\ & \left. \pm ka \beta_n^{(0)} a [2 \xi J_1(\tau_n \xi) - \tau_n J_2(\tau_n \xi)] \cos 2\varphi \right\} \end{aligned} \quad (74)$$

mit dem Normierungsfaktor

$$N_n = \sqrt{\pi} J_1'(\tau_n) \quad (75)$$

und der normierten Ausbreitungskonstanten

$$\beta_n^{(0)} a = \sqrt{(ka)^2 - \tau_n^2} \quad (76)$$

5. Ausblick

Ausgehend vom geraden Rundhohlleiter wurde in dieser Arbeit der Einfluß einer uniform gekrümmten Längsachse untersucht, wobei Korrekturterme zu den Eigenfunktionen und Eigenwerten der Hohlleiterwellen hergeleitet wurden. Eine verwandte Vorgehensweise wurde in [29] benutzt, um die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in verlustfreien inhomogenen Hohlleitern mit Kreisquerschnitt und gerader Längsachse jedoch langsam veränderlichem Querschnittsradius zu beschreiben. Man kann sich nun eine Kombination dieser beiden Inhomogenitäten denken, wobei sich ein quasi-Torushohlleiter ergibt, dessen Berechnung in einer weiteren Arbeit erfolgen soll. Ist man nur an den Störtermen 1. Ordnung interessiert, genügt sogar schon eine lineare Superposition der getrennt untersuchten Effekte.

6. Schrifttum

- [1] Jouguet, M. Les Effets de la Courbure sur la Propagation des Ondes Electromagnetiques dans les Guides a Section Circulaire.
Cables et Transmission (Paris), 1 (1947), H.2, S.133-153.
- [2] Miller, S.E. Notes on Methods of Transmitting the Circular Electric Wave around Bends.
Proceedings of the I.R.E. (1952), S.1104-1113.
- [3] Miyagi, M. Harada, K., Kawakami, S.
Wave Propagation and Attenuation in the General Class of Circular Hollow Waveguides with Uniform Curvature.
IEEE-MTT, 32 (1984), H.5, S.513-521.
- [4] Brambilla, M. Finzi, U.
Electro-Magnetic Eigenmodes of the Toroidal Cavity.
IEEE-PS, 2 (1974), S.112-114.
- [5] Zotter, B. Potential and Wave Equations in Toroidal Coordinates.
Rep. CERN/ISR-TH/77-56 (1977).
- [6] Keil, R. Jäger, J., Lileg, J., Schnizer, B.
Computation of Electromagnetic Eigenfrequencies within an Empty Torus.
Kleinheubacher Berichte, 27 (1983), S.23-30.
- [7] Lord Rayleigh Theory of Sound.
Bd.I, 2.Aufl., New York : Dover Publications (1945), S.115-118.
- [8] Schrödinger, E. Quantisierung als Eigenwertproblem.
Ann. d. Phys., 80 (1926), S.437-490.
- [9] Lileg, J. Störungstheoretische Berechnung der toroidal uniformen elektromagnetischen Eigenschwingungen im Inneren eines leeren Torushohlraumes.
Diplomarbeit, TU Graz (1982).
- [10] Lileg, J. Schnizer, B., Keil, R.
Perturbation Theoretic Computation of Toroidally Uniform Modes within an Empty Torus.
AEÜ, 37 (1983), H.11/12, S.359-365.
- [11] Moon, P. Spencer, D.E.
Field Theory Handbook.
Springer (1961), S.112-115.
- [12] Schupfer, N. Axialsymmetrische elektromagnetische Eigenschwingungen von plasmagefüllten toroidalen Resonatoren.
Dissertation, Leopold-Franzens-Universität Innsbruck (1985).
- [13] Lewin, L. A Decoupled Formulation of the Vector Wave Equation in Orthogonal Curvilinear Coordinates, with Application to Ferrite-Filled and Curved Waveguides of General Cross Section.
IEEE-MTT, 20 (1972), H.5, S.338-342.
- [14] Lewin, L. Chang, D.C., Kuester, E.F.
Electromagnetic Waves and Curved Structures.
P.Peregrinus Ltd., Stevenage (1977), Kap.6.
- [15] Zagrodzinski, J. Electromagnetic Field in Rotational Coordinates.
J.Phys.A : Math.Gen., 10 (1977), H.5, S.823-831.
- [16] Stratton, J.A. Electromagnetic Theory.
McGraw-Hill, New York (1941), S.32-34.
- [17] Cap, F. Toroidal Resonators and Waveguides of Arbitrary Cross Section.
IEEE-MTT, 29 (1981), H.10, S.1053-1059.
- [18] Birkhoff, G. Mac Lane, S.
A Survey of Modern Algebra.
The MacMillan Company, New York (1953), S. 236-243.
- [19] Pellat-Finet, P. Representation des Etats et des Operateurs de Polarisation de la Lumiere par des Quaternions.
Optica Acta, 31 (1984), H.4, S.415-434.
- [20] Huynen, J.R. Phenomenological Theory of Radar Targets.

- [21] Jäger, J. Dissertation, TH Delft (1970), Kap.2.
Schnizer, B.
Characteristic Values of Dominant Modes within an Empty Torus computed by Mesh Method.
Rep. ITPR-80011, Institut für Theoretische Physik, TU Graz (1980).
- [22] Schiff, L.I. Quantum Mechanics.
2.Aufl., McGraw-Hill (1955), S.151-161.
- [23] Blochinzew, D.I. Grundlagen der Quantenmechanik.
2.Aufl., Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1957), Kap.11.
- [24] Butkov, E. Mathematical Physics.
Addison-Wesley (1968), S.653-669.
- [25] Nayfeh, A.H. Perturbation Methods.
John Wiley & Sons (1973), S.71-76.
- [26] Lindsay, P.A. Einführung in die Quantenmechanik für Elektroingenieure.
Oldenbourg (1975), Kap.6.
- [27] Piefke, G. Feldtheorie I.
Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich (1977), S.244.
- [28] Pipes, L.A. Harvill, L.R.
Applied Mathematics for Engineers and Physicists.
3.Aufl., McGraw-Hill (1970), Kap.1.
- [29] Kark, K.W. Lösungen des elektromagnetischen Randwertproblems bei schwach inhomogenen Hohlleitern.
Kleinheubacher Berichte, 29 (1985), S.225-233.