

Lösungen des elektromagnetischen Randwertproblems  
bei schwach inhomogenen Hohlleitern

von

K.-W. Kark  
DFVLR, Institut für Hochfrequenztechnik  
8031 Oberpfaffenhofen

Zusammenfassung

Es wird die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in verlustfreien inhomogenen Hohlleitern mit Kreisquerschnitt behandelt. Aufbauend auf der WKB-Methode werden in Analogie zum homogenen kreiszylindrischen Hohlleiter adiabatische Moden definiert, deren Felder sich der langsam veränderlichen Struktur fließend anpassen. Durch neue Korrekturglieder zu den Eigenfunktionen und Betrachtung gekoppelter Hybridwellenpaare können Wellengleichung und Randbedingungen besser erfüllt werden.

Abstract

The propagation of electromagnetic waves is treated in loss free inhomogeneous hollow waveguides with circular cross section. Starting from the WKB-method adiabatic modes are defined by analogy with the homogeneous circular hollow waveguide. Their fields smoothly adapt to the slowly varying structure. The wave equation and the boundary conditions can be better satisfied by means of new correction terms incorporated within the eigenfunctions and consideration of coupled hybrid wave pairs.

1. Einleitung

In der Hohlleiterschaltungstechnik benötigt man oft Hohlleiterbauelemente, die als reflexionsarmer Übergang zwischen zwei angrenzenden Hohlleitern verschiedenen Querschnitts eingesetzt werden. Diese Bauelemente sind häufig inhomogen in dem Sinn, daß ihre Oberflächen nicht mit Koordinatenflächen eines orthogonalen Koordinatensystems, in dem die Wellengleichung separierbar ist, zusammenfallen. Eine exakte Lösung der skalaren Wellengleichung für die komplexe Amplitude des Vektorpotentials

$$(1) \quad \Delta A + k^2 A = 0$$

mit

$$(2) \quad k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

durch eine Bernoulli-Separation und Anpassen des vollständigen Lösungssystems an die Randbedingungen wie in [1] ist nicht mehr möglich.

Die Wellenausbreitung in allgemein inhomogenen Hohlleitern kann mittels Integralgleichungs- oder Differentialgleichungsverfahren beschrieben werden. Hierzu geeignete numerische Lösungsmethoden sind etwa die Momentenmethode [2] und die Methode der Finiten Differenzen [3]. Hierbei wird die Oberfläche des Hohlleiters jeweils durch ein diskretes Punktgitter modelliert. Die Maschenweite sollte als Faustregel nicht größer als  $\lambda/5$  gewählt werden. Bei überdimensionierten Wellenleitern (overmoded waveguides) mit Abmessungen groß gegen die Wellenlänge erfordern diese numerischen Verfahren hohen Speicheraufwand und große Rechenzeit.

Es wird nun ein analytisches Rechenverfahren vorgestellt, das auf einer genäherten Erfüllung der Wellengleichung und der Randbedingungen beruht und bei dem auch im Fall überdimensionierter Wellenleiter der Aufwand an Speicherplatz und Rechenzeit unter ökonomischen Gesichtspunkten noch vertretbar ist.

2. Das modifizierte adiabatische Modenverfahren-MAM

2.1 Voraussetzungen

Es werden nur zylindrische verlustfreie Hohlleiter ( $\kappa = \infty$ ) mit gerader Längsachse und Kreisquerschnitt betrachtet. Der Hohlleiterrand darf weder Knicke noch Sprünge aufweisen. Der normierte Radius  $ka(kz)$  des Kreisquerschnitts sei also stetig differenzierbar und soll sich abhängig von der normierten Längskoordinate  $kz$  nur "langsam" (siehe 2.3) und monoton ändern. Mangels eines der Struktur angepaßten separierbaren Koordinatensystems werden orthogonale Kreiszylinderkoordinaten benutzt, siehe Bild 1.

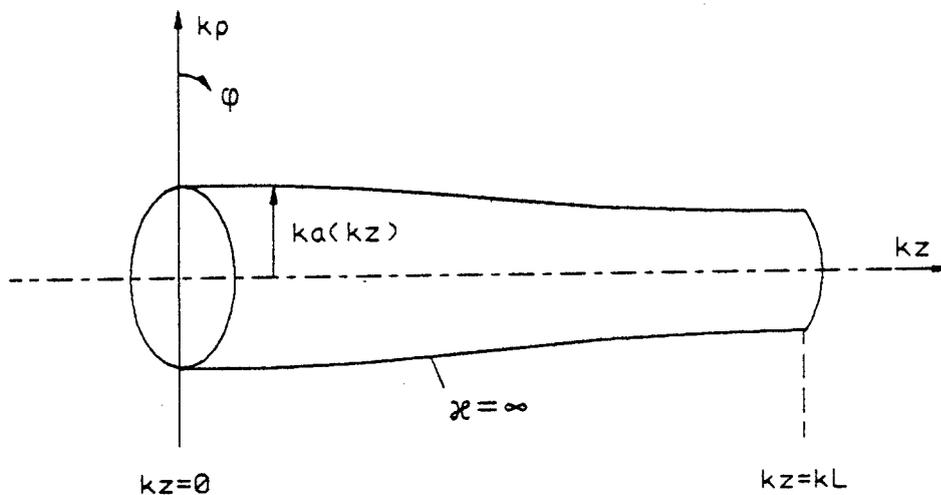


Bild 1 Hohlleitergeometrie.

Nach einer Abschätzung in [4] ist asymptotisch für große Querschnitte die Anzahl der ausbreitungsfähigen Wellen gleich

$$(3) \quad N = \left(\frac{ka}{2}\right)^2 .$$

Bei overmoded waveguides mit z. B.  $ka = 100$  liefert diese Abschätzung  $N = 2500$  ausbreitungsfähige Moden.

### 2.2. Adiabatische Moden

In einer inhomogenen Leitung wie in Bild 1 können  $E_{mn}$ - oder  $H_{mn}$ -Eigenwellen mit jeweils fünf Feldkomponenten nicht angegeben werden, weil kein separierbares Koordinatensystem bekannt ist, in dem die Randflächen mit Koordinatenflächen zusammenfallen. Aufgrund der nur schwachen Inhomogenität werden die sich einstellenden Felder starke Ähnlichkeit mit denen des homogenen geraden Kreiszyinders haben. Die gewöhnlichen adiabatischen Moden der inhomogenen Struktur sind nun gerade Felddarstellungen mit den gleichen Querschnittseigenfunktionen wie die Eigenwellen eines homogenen Wellenleiters von gleichem Querschnitt [5]. Die Inhomogenität drückt sich vorwiegend in einer geeignet zu bestimmenden Längseigenfunktion aus.

In erster Näherung rechnet man also doch mit 5-Komponenten-Wellen, deren Felder man durch Differentiation aus einem Vektorpotential mit einer kartesischen Komponente in Längsrichtung ableiten kann. Ausgehend vom runden Hohlleiter macht man nun einen adiabatischen Wellenansatz

$$(4) \quad \vec{A}(\rho, \varphi, z) = C A_t(\rho, \varphi, z) A_z(z) \vec{e}_z .$$

mit

$$(5) \quad A_t(\rho, \varphi, z) = J_m(K(z)\rho) e^{\pm jm\varphi} ,$$

wobei der Querschnittseigenwert als

$$(6) \quad K(z) = \begin{cases} j_{mn}/a(z) & \text{bei } E_{mn}\text{-Wellen} \\ j'_{mn}/a(z) & \text{bei } H_{mn}\text{-Wellen} \end{cases}$$

gesetzt wird und  $j_{mn}$  bzw.  $j'_{mn}$  die  $n$ -ten Nullstellen der gewöhnlichen Besselfunktion  $J_m$  bzw. deren Ableitung  $J'_m$  sind.

Die noch unbekannte Längseigenfunktion  $A_z(z)$  bestimmt man aus der Forderung, daß der Ansatz (4) die Wellengleichung (1) zumindest näherungsweise erfüllen muß. Bei Vernachlässigen aller Terme  $O(a')$  sowie höherer Ordnung erhält man

$$(7) \quad \frac{d^2 A_z}{dz^2} + k_z^2(z) A_z = 0$$

mit dem Quadrat der ( $z$ -abhängigen) Ausbreitungskonstanten aus der Separationsgleichung

$$(8) \quad k_z^2(z) = k^2 - K^2(z)$$

### 2.3 WKB-Methode

Zurückgehend auf Ideen von Wentzel, Kramers und Brillouin zur genäherten Lösung der Schrödingergleichung in der Quantenmechanik [6] kann für eine langsam veränderliche Ausbreitungskonstante  $k_z(z)$  die Dgl. (7) näherungsweise gelöst werden [7]. Im homogenen Wellenleiter ist  $k_z$  für jeden Wellentyp eine Konstante. Bei schwacher Inhomogenität ähnelt Gl. (7) der Schwingungsdifferentialgleichung, und dies rechtfertigt einen Lösungsansatz [7]

$$(9) \quad A_z(z) = \Lambda(z) e^{-j\hat{\phi}(z)}$$

Die Amplitude  $\Lambda$  sei langsam und die Phase  $\phi$  schnell veränderlich.

Setzt man (9) in (7) ein, so erhält man bei Vernachlässigung von  $\Lambda''$  die WKB-Lösung

$$(10) \quad A_z(z) = \frac{1}{\sqrt{k_z(z)}} e^{-j\hat{\xi}(z)}$$

mit dem Phasenintegral

$$(11) \quad \hat{\xi}(z) = \int_0^z k_z(\zeta) d\zeta$$

Der Ausdruck (10) ist nur so lange eine gute Näherung für die gesuchte Längseigenfunktion, als gilt

$$(12) \quad \frac{|k'_z|}{|k_z|^2} \ll 1$$

Diese Bedingung wird verletzt für schnelle Radiusänderungen, die aber nach Voraussetzung ausgeschlossen sind, sowie für  $|k_z| \rightarrow 0$ , also bei Annäherung einer Welle an ihren cutoff.

Cutoff-Moden erfordern eine gesonderte Betrachtung. Eine zunächst noch ausbreitungsfähige Welle nähert sich bei Ausbreitung in einem sich verengenden Kanal ihrem cutoff-Querschnitt. Hier hat ihre Ausbreitungskonstante  $k_z$  eine Nullstelle; von einem reellen Wert im Wellenbereich wechselt sie zu einem imaginären Wert im Dämpfungsbereich. Die Welle wird am cutoff total reflektiert. Durch ihren cutoff-Querschnitt kann sie keine Wirkleistung transportieren, sie wird exponentiell gedämpft. Vor dem cutoff baut sich ein

stehendes Wellenfeld auf. Jeder Wellentyp hat, von Entartungen abgesehen ( $H_{0n}$ -,  $E_{1n}$ -Wellen), seine cutoff-Stelle  $z_{mn}^c$  bei einem anderen Radius.

$$(13) \quad ka(z_{mn}^c) = \begin{cases} j_{mn} & \text{bei } E_{mn}\text{-Wellen} \\ j'_{mn} & \text{bei } H_{mn}\text{-Wellen} \end{cases}$$

Wellen mit Eigenwerten, die keinen genügend kleinen Querschnitt (13) finden, erreichen keinen cutoff und breiten sich ungedämpft in der gesamten inhomogenen Struktur aus.

Zur Bestimmung der Längseigenfunktion bei cutoff-Moden geht man, ausreichend weit vom cutoff entfernt, wie oben bei nicht cutoff-Moden vor. In der cutoff-Umgebung approximiert man  $k_z^2$  in Gl. (7) durch das lineare Glied einer Taylorreihe und erhält dabei die neue Dgl.

$$(14) \quad \frac{d^2 A_z}{dz^2} - p(z - z_{mn}^c) A_z = 0$$

Die Konstante  $p$  ist die Steigung der Kurve von  $k_z^2$  im Nulldurchgang. Mit Hilfe der Transformation

$$(15) \quad t = p^{1/3} (z - z_{mn}^c)$$

erhält man die bekannte Stokes Differentialgleichung [8]

$$(16) \quad \frac{d^2 A_z}{dt^2} - t A_z = 0$$

deren Lösungen als Airy-Funktionen

$$(17) \quad Ai(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{t}{3}} K_{1/3} \left( \frac{2}{3} t^{3/2} \right) & , t > 0 \\ \frac{1}{3} \sqrt{|t|} \left( J_{1/3} \left( \frac{2}{3} |t|^{3/2} \right) + J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} |t|^{3/2} \right) \right) & , t < 0 \end{cases}$$

und

$$(18) \quad Bi(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{t}{3}} \left( I_{-1/3} \left( \frac{2}{3} t^{3/2} \right) + I_{1/3} \left( \frac{2}{3} t^{3/2} \right) \right) & , t > 0 \\ \sqrt{\frac{|t|}{3}} \left( J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} |t|^{3/2} \right) - J_{1/3} \left( \frac{2}{3} |t|^{3/2} \right) \right) & , t < 0 \end{cases}$$

über Zylinderfunktionen darstellbar sind [9]. Die Längseigenfunktionen  $Ai$  und  $Bi$  kennzeichnen Wellen mit entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung.

Zur Felddarstellung der cutoff-Moden im gesamten Hohlleiter müssen die im cutoff-Bereich gültigen Längseigenfunktionen (17) und (18) stetig differenzierbar an jene angeschlossen werden, die nur weit entfernt von der cutoff-Stelle gültig sind (10). Langer hat in [10] (siehe auch [11]) uniforme Verbindungs- und Übergangsformeln angegeben, die im gesamten Raumbereich anwendbar sind.

#### 2.4 Eigenschaften der adiabatischen Moden

Adiabatische Moden in schwach inhomogenen Wellenleitern sind Näherungslösungen der Feldgleichungen. Obwohl sie keine Eigenwellen der Struktur sind, passen sie sich fließend durch Änderung ihres Querschnittseigenwerts  $K(z)$  Gl. (6) der veränderten Geometrie an. Pierce kennzeichnete diese Adaptionsfähigkeit als Prinzip von der Erhaltung der Modenindices [12].

Die zwei wesentlichen Mängel der adiabatischen Modentheorie sind:

1.) Die Wellengleichung (1) wird mit den genäherten Eigenfunktionen (5) und (10) für das Vektorpotential (4) nicht exakt erfüllt. Es gilt vielmehr

$$(19) \quad \Delta A + k^2 A = O(a')$$

mit  $a' = da/dz$ .

2.) Die Randbedingungen bei  $\rho = a$  werden von 5-komponentigen  $E_{mn}$ - bzw.  $H_{mn}$ -Wellen alleine nicht erfüllt. Der Fehler, verursacht durch die somit vernachlässigte Kopplung, ist ebenfalls von erster Ordnung  $O(a')$ .

Im folgenden wird gezeigt, wie man die vernachlässigten Terme 1. Ordnung konsistent als Korrektur in die bisherigen Rechnungen aufnehmen kann und somit einen reduzierten Restfehler der Ordnung  $O(a'', (a')^2)$  erhält.

## 2.5 Modifikationen der adiabatischen Modentheorie - MAM

### 2.5.1 Wellengleichung

Zur genaueren Erfüllung der Wellengleichung (1) übernimmt man nicht einfach die Querschnittseigenfunktionen des runden Hohlleiters (5), sondern macht für den Transversalterm  $A_z$  in (4) den Ansatz

$$(20) \quad A_z(\rho, \varphi, z) = A_\rho(\rho, z) e^{\pm jm\varphi}$$

und übernimmt für den Ausbreitungsterm  $A_z$  die vorher abgeleitete WKB-Näherung.

Mit dem Ansatz (4), (20) und der WKB-Näherung für  $A_z$  geht man in die Wellengleichung (1). Vernachlässigt man bei der Differentiation alle Terme 2. Ordnung  $O(a'', (a')^2)$ , behält im Gegensatz zur Herleitung von (7) aber alle Terme 1. Ordnung  $O(a')$  in der Rechnung bei, so findet man für den unbekanntes Radialterm eine partielle Dgl. in zwei Veränderlichen.

$$(21) \quad \frac{\partial^2 A_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \left( K^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) A_\rho = - \frac{2}{A_z} \frac{dA_z}{dz} \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Die rechte Seite von (21) mit der WKB-Näherung für  $A_z$  ist von der Ordnung  $O(a')$  und liefert eine Korrektur zum Radialterm  $J_m(K(z)\rho)$ , siehe Gl. (5), der durch die linke Seite von (21) bestimmt ist.

Man löst (21) schrittweise durch Picard-Iteration. Ausgehend von dem Startwert

$$(22) \quad A_\rho^{(0)} = J_m(K(z)\rho)$$

findet man nach etwas mühsamen Integrationen einen verbesserten Radialterm

$$(23) \quad A_\rho^{(1)} = J_m(K\rho) (1 + \alpha(\rho, z)a') + J_{m+1}(K\rho) \beta(\rho, z)a'$$

Die Korrekturfaktoren  $\alpha$  und  $\beta$ , die hier nicht explizit angegeben werden, sind von  $A_z$  abhängig und deshalb auch für hin- und rücklaufende Welle verschieden. Insgesamt unterscheidet sich der verbesserte Radialterm  $A_\rho^{(1)}$  nur durch Terme  $O(a')$  von der adiabatischen Näherung (22).

Durch Einsetzen der neuen Eigenfunktionen in die Wellengleichung (1) erhält man

$$(24) \quad \Delta A^{(1)} + k^2 A^{(1)} = O(a'', (a')^2) ,$$

während bei den adiabatischen Moden noch

$$(25) \quad \Delta A^{(0)} + k^2 A^{(0)} = O(a')$$

galt. Der Fehler bei der Wellengleichung konnte somit um eine Ordnung verkleinert werden. Im folgenden wird gezeigt, daß die modifizierten adiabatischen Moden auch eine genauere Erfüllung der Randbedingungen ermöglichen.

### 2.5.2 Randbedingungen und Modenkopplung

Aus dem adiabatischen Wellenansatz in (5) leitet man wie im runden Hohlleiter Feldstärken in Zylinderkoordinaten ab, die sich am Hohlleiterrand für  $\rho = a$  wie folgt verhalten:

$$(26) \quad E_z = E_\varphi = H_\rho = 0 \quad \text{für } \rho = a .$$

Die Randbedingungen im veränderlichen Kanal mit zur z-Achse geneigten Wänden lauten aber vielmehr

$$(27a) \quad \vec{n} \times \vec{E} = 0 \rightarrow E_z^E + a' (E_\rho^E + E_\rho^H) = 0$$

und

$$(27b) \quad E_\varphi^E + E_\varphi^H = 0$$

sowie

$$(28) \quad \vec{n} \cdot \vec{H} = 0 \rightarrow (H_\rho^E + H_\rho^H) - a' H_z^H = 0 .$$

Mit den adiabatischen Moden, die sich am Rande wie die Eigenwellen des runden Hohlleiters verhalten (26), ist auch durch eine hybride Kombination zu EH- bzw. HE-Wellen mit jeweils sechs Feldkomponenten niemals eine genauere Erfüllung der Randbedingungen (27, 28) in der inhomogenen Struktur möglich.

Bei den modifizierten adiabatischen Moden, deren Felder wegen des neuen Radialterms (23) sich nicht wie in (26) verhalten, kann man durch Bildung hybrider Koppelpaare vom  $EH_{mn}$ - bzw.  $HE_{mn}$ -Typ ein besseres Verhalten am Hohlleiterrand erwarten. Eine exakte Erfüllung der Randbedingungen ist aber dennoch nicht möglich, weil die MAM-Methode nicht orthogonale Wellenfelder benutzt und somit E- und H-Feldlinien in keinem Feldpunkt aufeinander senkrecht stehen. Der nicht orthogonale Beitrag hat seine Ursache im Term  $J_{m+1}$  beim modifizierten Radialterm (23); bei geeigneter Wahl eines komplexen Koppelkoeffizienten im Hybridwellenpaar ist sein Einfluß aber von höherer Ordnung, und alle Randbedingungen lassen sich mit einem Restfehler  $O(a'', (a')^2)$  erfüllen, während bei den ungekoppelten adiabatischen Moden noch ein Randfehler der Ordnung  $O(a')$  in Kauf genommen werden mußte.

Die Randbedingungen (27, 28) für das elektromagnetische Gesamtfeld sollen auch von jedem Hybridwellenpaar angenähert erfüllt werden. Mit Hilfe einer Felddarstellung durch die Vektorpotentiale der modifizierten adiabatischen Moden erhält man bei jedem Hybridpaar ein überbestimmtes Gleichungssystem für den komplexen Koppelkoeffizienten  $\gamma_{mn}$ .

$$(29) \quad \vec{n} \times (P_{mn} \nabla \times \vec{A}_{mn}^H + Q_{mn} \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \nabla \times \vec{A}_{mn}^E) = 0,$$

$$(30) \quad \vec{n} \cdot (Q_{mn} \nabla \times \vec{A}_{mn}^E - P_{mn} \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \nabla \times \vec{A}_{mn}^H) = 0$$

mit

$$(31) \quad P_{mn} = \begin{cases} \gamma_{mn}^{EH} & \text{bei } EH_{mn}\text{-Wellen} \\ 1 & \text{bei } HE_{mn}\text{-Wellen} \end{cases}$$

$$(32) \quad Q_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{bei } EH_{mn}\text{-Wellen} \\ \gamma_{mn}^{HE} & \text{bei } HE_{mn}\text{-Wellen} \end{cases}$$

Im Sonderfall rotationssymmetrischer Wellen ( $m = 0$ ) nützt eine hybride Paarbildung jedoch nichts, weil die je drei Feldkomponenten von  $E_{on}$ - und  $H_{on}$ -Wellen sich komplementär ergänzen und eine Randkompensation nicht möglich ist. Der Fehler in den Randbedingungen ist daher hier immer noch  $O(a')$ . Eine Verbesserung dieses Verhaltens ist noch beabsichtigt. Sonstige E-E- und H-H-Kopplung, d. h. Kopplung zwischen Wellen verschiedener Modenindices, wird vernachlässigt.

Die gesuchten Koppelkoeffizienten der Hybridwellenpaare bestimmt man ausgehend vom überbestimmten Gleichungssystem (29, 30) durch eine Minimierung der Fehlwinkel der Feldlinien am Hohlleiterrand, siehe Bild 2.

$$(33) \quad F = \chi_E^2 + \chi_H^2 = \text{Min} !$$

mit

$$(34a) \quad \tan \chi_E = \frac{E_t(t)}{E_n(t)} \Big|_{\rho=a}$$

und

$$(34b) \quad \tan \chi_H = \frac{H_n(t)}{H_t(t)} \Big|_{\rho=a}$$

ausgedrückt durch Tangential- und Normalkomponenten der Feldstärken im Zeitbereich.

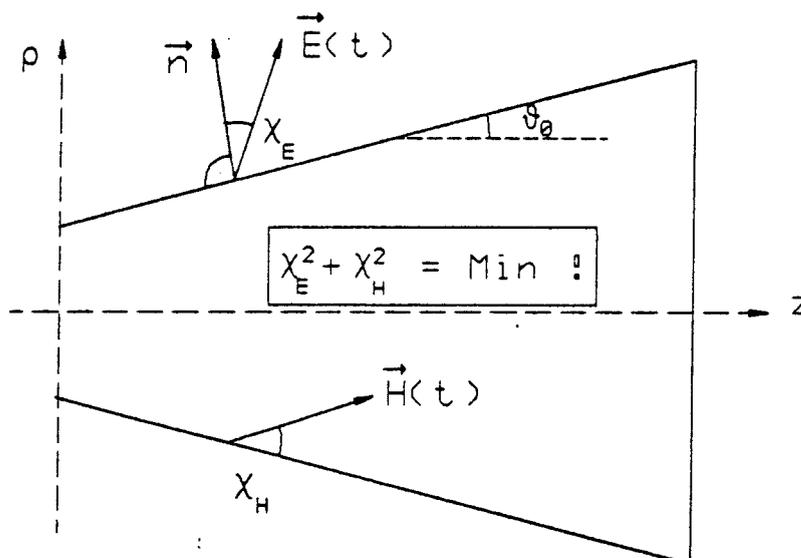


Bild 2 Fehlwinkel der Feldlinien am Hohlleiterrand für den Spezialfall einer geraden Mantellinie (die Mißweisung ist stark übertrieben gezeichnet).



- [4] Courant, R.  
Hilbert, D. Methoden der Mathematischen Physik I.  
3. Auflage, Springer (1968).
- [5] Arnold, J.M.  
Felsen, L.B. Ray Invariants, Plane Wave Spectra and Adiabatic Modes for Tapered Dielectric Waveguides.  
Radio Science, 19 (1984), H. 5, S. 1256 - 1264.
- [6] Kramers, H.A. Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung.  
Zs. f. Phys., 39 (1926), S. 828 - 840.
- [7] Wait, J.R. Electromagnetic Waves in Stratified Media.  
Pergamon Press (1962), S. 86 - 106.
- [8] Budden, K.G. Radio Waves in the Ionosphere.  
Cambridge University Press (1961), Kap. 15, S. 283 ff.
- [9] Abramowitz, M.  
Stegun, I.A. Handbook of Mathematical Functions.  
9. Aufl. Dover Publications (1972), S. 447.
- [10] Langer, R.E. On the Connection Formulas and the Solutions of the Wave Equation.  
Phys. Rev., 51 (1937), S. 669 - 676.
- [11] Morse, P.M.  
Feshbach, H. Methods of Theoretical Physics.  
Part II. McGraw-Hill (1953), S. 1092 - 1106.
- [12] Pierce, A.D. Extension of the Method of Normal Modes to Sound Propagation in an Almost-Stratified Medium.  
J. Acoust. Soc. Am., 37 (1965), H. 1, S. 19 - 27.
- [13] Rutherford, S.R.  
Hawker, K.E. Consistent Coupled Mode Theory of Sound Propagation for a Class of Nonseparable Problems.  
J. Acoust. Soc. Am., 70 (1981), S. 554 - 564.