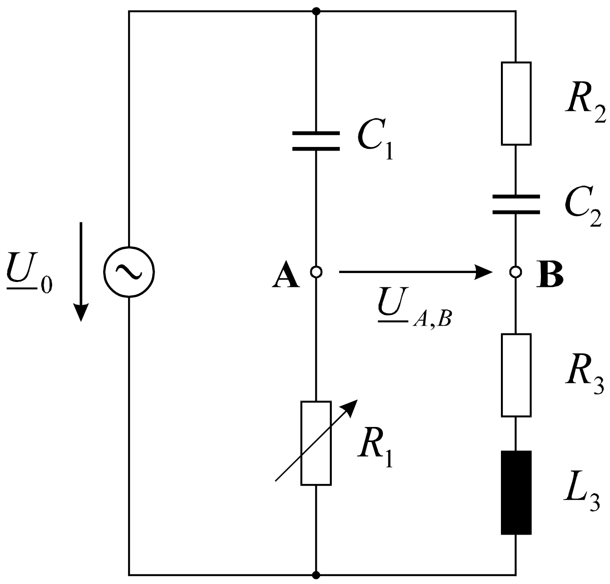
Zweipole

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgendes Netzwerk. Es wird von einer sinusförmigen Wechselspannung $\underline{U}_0$ der Frequenz $f = 50\ \mathrm{Hz}$ angeregt.



Die Bauelemente des rechten Zweiges werden wie folgt gewählt:

$$\boxed{R_3 = \omega L_3 = \frac{1}{2\,\omega C_2} = 4\,R_2} \qquad (*)$$

a) Bestimmen Sie die Brückenspannung $\underline{U}_{A,B}$ unter Berücksichtigung der Beziehung **(*)**.

[$\underline{U}_{A,B}/\underline{U}_0 = (1 - j\,8)/(5 - j\,4) - 1/(1 + j\,\omega R_1 C_1)$ **]**

b) Bestimmen Sie den Betrag der Brückenspannung $|\underline{U}_{A,B}|$. Verwenden Sie dabei zweckmäßig die Abkürzung $x = \omega R_1 C_1$.

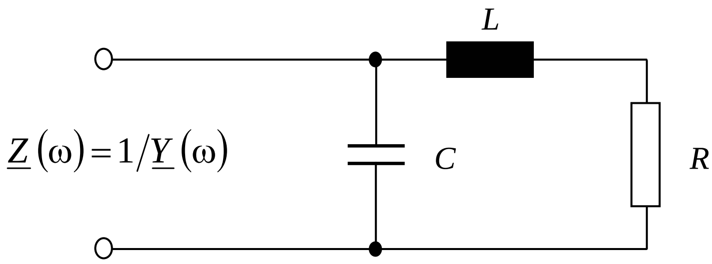
[$|\underline{U}_{A,B}| = |\underline{U}_0| \cdot \sqrt{65x^2 - 72x + 32} \big/ \sqrt{41 \cdot (1 + x^2)}$]

c) Es sei $C_1 = 20{,}59\ \mu\mathrm{F}$. Für welchen Wert von R_1 wird $|\underline{U}_{A,B}|$ minimal?

[$R_1 = 100\ \Omega$]

Aufgabe 2:

Gegeben ist der dargestellte Zweipol aus 3 Bauelementen.



a) Entwickeln Sie schrittweise zeichnerisch die Ortskurve der **Impedanz** $\underline{Z}(\omega)$ für $0 \le \omega \le \infty$ und bezeichnen Sie markante Punkte. Benennen Sie stets die Achsen und auch die Durchlaufrichtung. Eine qualitative Darstellung ist ausreichend.

b) Bestimmen Sie rechnerisch die **Admittanz** $\underline{Y}(\omega)$ des oben stehenden Zweipols nach Real- und Imaginärteil.

[$\underline{Y} = \dfrac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left[\omega C - \dfrac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right]$]

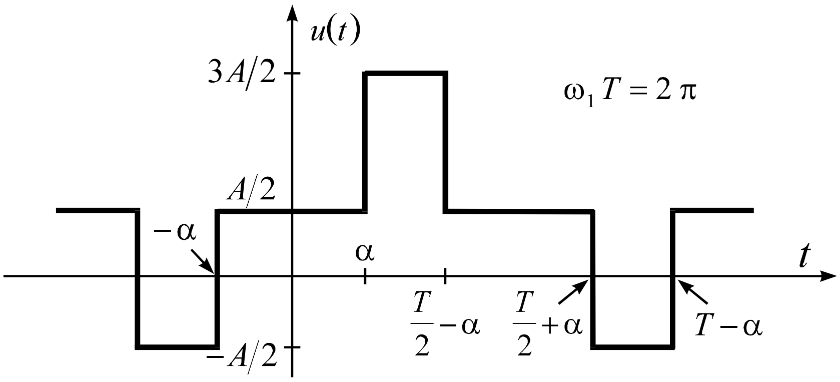
c) Bei welchen zwei Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 gilt $\mathrm{Im}\{\underline{Y}\} = 0$?
Welche Werte nimmt dort jeweils der Realteil der Admittanz an?

[$\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{1 - R^2 C/L}$, $\mathrm{Re}\{\underline{Y}(\omega_1)\} = 1/R$, $\mathrm{Re}\{\underline{Y}(\omega_2)\} = RC/L$]

Fourier-Analyse

Aufgabe 1:

Gegeben ist der dargestellte Spannungsverlauf $u(t)$. Die Zeitfunktion $u(t)$ ist periodisch mit der Periode T.



a) Geben Sie den *Wertebereich* an, innerhalb dessen α sinnvoll liegen muss.
$[0 \le \alpha \le T/4]$

b) Tragen Sie in obiges Diagramm den *Zeitpunkt* $t = T/4$ auf der Zeitachse ein.

c) Wie groß ist der *Gleichspannungsanteil* U_0 der Wechselspannung $u(t)$?
$[U_0 = A/2]$

d) Welche *Symmetrien* besitzt die gleichanteilsfreie Funktion $\tilde{u}(t) = u(t) - U_0$?
[ungerade Funktion und Halbwellensymmetrie]

e) Entwickeln Sie unter Beachtung von b), c) und d) die periodische Funktion $u(t)$ in eine reelle *Fourier-Reihe* der Form:

$$u(t) = U_0 + \tilde{u}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t) \right] .$$

Bestimmen Sie alle Entwicklungskoeffizienten, und schreiben Sie die daraus resultierende Fourier-Reihe für $u(t)$ explizit hin.

$$[\ u(t) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)\,\omega_1 \alpha]}{2n-1} \sin[(2n-1)\,\omega_1 t]\ ]$$

f) Es sei $\alpha = T/6$. Geben Sie die Spannung $u'(t)$ an, die aus der Fourier-Reihe für $u(t)$ entsteht, wenn nur Spektralanteile bis zur *vierten* Harmonischen $(4\omega_1)$ berücksichtigt werden. $u'(t) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \sin(\omega_1 t) - \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) \right\}$

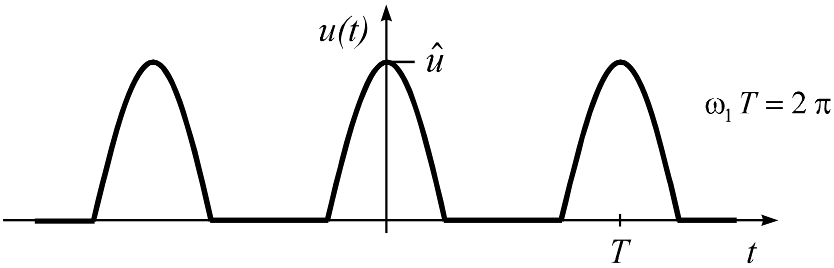
g) Berechnen Sie die *Welligkeit* w der unter **f)** ermittelten Spannung $u'(t)$.
$[w = 1{,}082]$

h) Welche *Welligkeit* erhalten Sie für $\alpha = T/4$? $[w = 0]$

Hinweis: *Überlegen, und nicht rechnen!*

Aufgabe 2:

Aus einer periodischen Zeitfunktion $\hat{u}\cdot\cos(\omega_1 t)$ entsteht durch Einweggleichrichtung folgender Spannungsverlauf $u(t)$.



a) Wie groß ist der Gleichspannungsanteil U_0 der Wechselspannung $u(t)$?

[$U_0 = \hat{u}/\pi$]

b) Entwickeln Sie die periodische Funktion $u(t)$ in eine reelle Fourier-Reihe der Form:

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\, a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t) \right] .$$

Bestimmen Sie alle Entwicklungskoeffizienten und zeichnen Sie das reelle Amplitudenspektrum bis einschließlich der sechsten Harmonischen ($n = 6$).

[$b_n = 0,\ a_0 = U_0,\ a_1 = \hat{u}/2,\ a_n = -\dfrac{2\,\hat{u}}{\pi}\,\dfrac{\cos(n\pi/2)}{n^2-1}$ für $n \geq 2$]

c) Berechnen Sie einen Näherungswert für die Welligkeit der Funktion $u(t)$, indem Sie alle Harmonische bis einschließlich $n = 6$ berücksichtigen.

[$w \approx 1{,}211$]

Hilfsbeziehungen:

$$\int \cos(a\,x)\cos(b\,x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{\sin(a-b)\,x}{2(a-b)} + \dfrac{\sin(a+b)\,x}{2(a+b)} & \text{für } |a| \neq |b| \\[2ex] \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin(2\,a\,x)}{4\,a} & \text{für } |a| = |b| \end{cases}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Aufgabe 3:

Im Intervall $0 \le t < T$ sei folgende Spannungsfunktion gegeben:

$$u(t) = U_0 \cdot e^{-t/T} .$$

Die Funktion wird anhand der Vorschrift $u(t+T) = u(t)$ periodisch fortgesetzt und soll durch ihre Fourier-Reihe

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t) \right]$$

mit $\omega_1 T = 2\pi$ dargestellt werden.

a) Zeichnen Sie den Kurvenverlauf von $u(t)$ im Bereich $-T \le t < 2T$.

b) Berechnen Sie den Gleichanteil der Funktion $u(t)$. [$a_0 = U_0 (1 - 1/e)$]

c) Bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten a_n der Funktion $u(t)$ mit $n \ge 1$.

[$a_n = 2 U_0 \cdot (1 - 1/e) \cdot \dfrac{1}{1 + (2\pi n)^2}$]

d) Die Entwicklungskoeffizienten b_n der Funktion $u(t)$ genügen der Gleichung

$$b_n = 2 U_0 \cdot (1 - 1/e) \cdot \frac{2\pi n}{1 + (2\pi n)^2}$$

mit $n \ge 1$. Bestimmen Sie die Amplitude und den Nullphasenwinkel der Grundschwingung von $u(t)$. [$A_1 = 2 U_0 \cdot \dfrac{1 - 1/e}{\sqrt{1 + 4\pi^2}}$, $\varphi_1 = -\arctan(2\pi) \approx -81°$]

e) Tritt in der Fourier-Reihe von $u(t)$ das Gibbssche Phänomen auf? Begründen Sie Ihre Antwort. [Ja, wegen der Sprungstellen.]

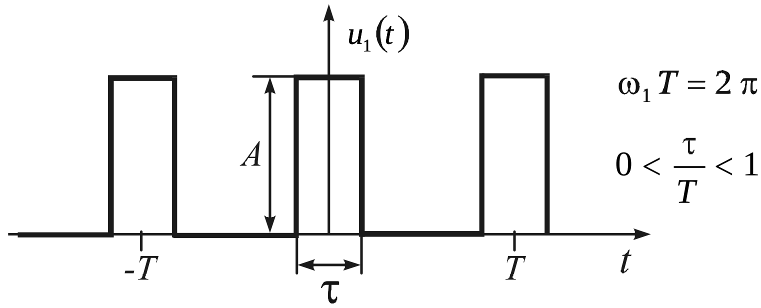
Hilfe:

$$\int e^{ax} \cdot \cos(bx)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \cdot \left[a \cos(bx) + b \sin(bx) \right]$$

$$\int e^{ax} \cdot \sin(bx)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \cdot \left[a \sin(bx) - b \cos(bx) \right]$$

Aufgabe 4:

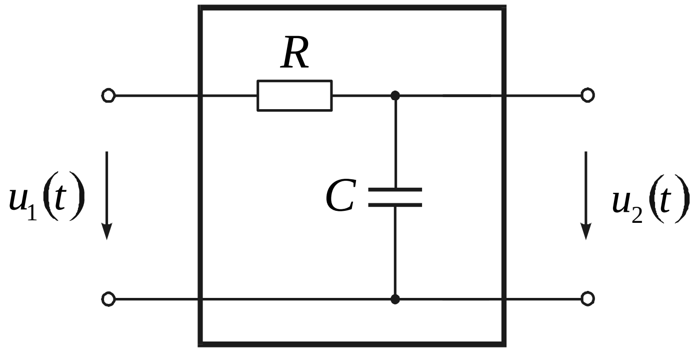
Es sei folgende periodische Zeitfunktion $u_1(t) = u_1(-t)$ mit $A > 0$ gegeben:



a) Zeigen Sie durch Bestimmung aller Entwicklungskoeffizienten, dass $u_1(t)$ durch folgende Fourier-Reihe dargestellt werden kann:

$$u_1(t) = A\,\frac{\tau}{T} \cdot \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{si}\left(n\,\pi\,\tau/T\right) \cos\left(n\,\omega_1\,t\right) \right] .$$

b) Die Spannung $u_1(t)$ wird nun als Eingangssignal eines RC-Glieds verwendet.



- Wie lautet die Fourier-Reihe von $u_2(t)$?

  [$u_2(t) = A\,\frac{\tau}{T} \cdot \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{si}\left(n\,\pi\,\tau/T\right)}{\sqrt{1+\left(2\,\pi\,n\,R\,C/T\right)^2}} \cos\left(n\,\omega_1\,t - \arctan\left(n\,\omega_1\,R\,C\right)\right) \right]$]

- Es gelte $\tau/T = 0{,}5$ und $RC/T = 1/\pi$. Ab welcher Ordnung n werden die Amplituden der Harmonischen des Ausgangssignals $u_2(t)$ kleiner als $0{,}00648 \cdot A$?

  [$n = 7$]

<u>Aufgabe 5</u>:

Betrachten Sie die periodische Zeitfunktion $f(x) = \cos(p\,x)$. Dabei sei der positive Faktor $p > 0$ **<u>keine</u>** natürliche Zahl. Es gelte also ausdrücklich: $p \neq m = 0,1,2,3,\ldots$

a) Welche Periodenlänge hat $f(x)$? [$2\pi/p$]

b) Welche Symmetrien hat $f(x)$? [gerade $\rightarrow b_n = 0$]

c) Entwickeln Sie im Folgenden $f(x)$ in eine reelle Fourier-Reihe der Form

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\, a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x) \,\right]$$

und zeigen Sie, dass gilt:

$$\boxed{f(x) = \frac{2\,p \sin(p\,\pi)}{\pi} \left[\frac{1}{2\,p^2} - \frac{\cos x}{p^2 - 1} + \frac{\cos(2\,x)}{p^2 - 4} - \cdots \right]}$$

Bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten a_0 und a_n durch Berechnung der Entwicklungsintegrale.

<u>Hilfsbeziehung</u>:

$$\int_0^{\pi} \cos(p\,x)\cos(n\,x)\,d\,x = \left[\frac{\sin((p-n)\,x)}{2(p-n)} + \frac{\sin((p+n)\,x)}{2(p+n)} \right]_{x=0}^{\pi} \quad \text{für } p \neq n$$

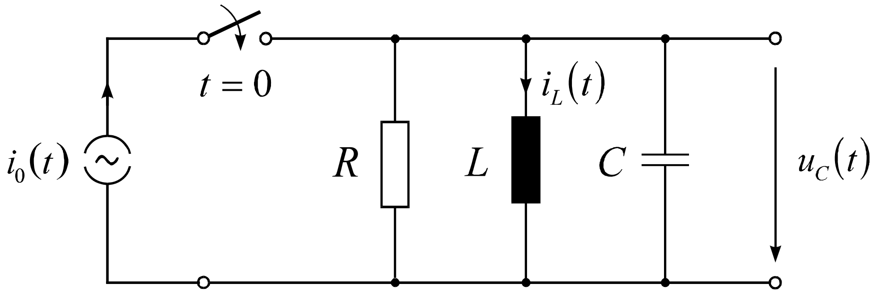
d) Was entsteht aus der Fourier-Reihe c), falls Sie den Grenzübergang $p \rightarrow m = 0,1,2,3,\ldots$ durchführen?

[$p \rightarrow 0$: $a_0 = 1, a_n = 0$ und $p \rightarrow m = 1,2,3,\ldots$: $a_0 = 0, a_n = 0$ außer $a_m = 1$. Es bleibt von der Fourier-Reihe also nur je <u>*ein*</u> Term übrig.]

Einschwingvorgänge

Aufgabe 1:

Gegeben ist folgender Parallelschwingkreis, der für $t \geq 0$ mit einer idealen Stromquelle $i_0(t) = \hat{i}_0 \sin(\omega t)$ erregt wird. Im Schaltmoment $t = 0$ sei das Netz energiefrei.



a) Berechnen Sie die Laplace-Transformierten $\underline{I}_0(p)$ und $\underline{I}_L(p)$. Verwenden Sie dazu die Abkürzungen $\omega_0^2 = 1/(LC)$ und $\delta = 1/(2RC)$.

[$\underline{I}_L(p) = \dfrac{\hat{i}_0\, \omega\, \omega_0^2}{(p^2 + 2\delta\, p + \omega_0^2) \cdot (p^2 + \omega^2)}$]

b) Bestimmen Sie die Zeitfunktion des Spulenstromes $i_L(t)$ ○—● $\underline{I}_L(p)$ im gesamten Definitionsbereich $-\infty < t < \infty$.

c) Der Parallelschwingkreis sei nun verlustfrei $(R \to \infty)$ und es gelte $\omega \neq \omega_0$. Vereinfachen Sie das Ergebnis $i_L(t)$ aus **b)** für diesen Spezialfall. Welchen zeitlichen Verlauf nimmt dann die Kondensatorspannung $u_C(t)$?

[$i_L(t) = \hat{i}_0\, \omega_0\, \dfrac{\omega \sin(\omega_0 t) - \omega_0 \sin(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2}$, $u_C(t) = L\, \hat{i}_0\, \omega\, \omega_0^2\, \dfrac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2}$]

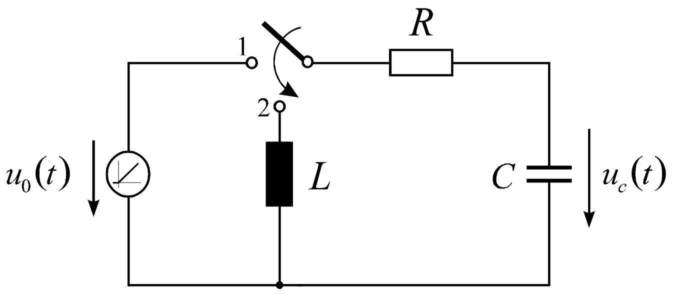
d) Führen Sie in dem Ausdruck $u_C(t)$ aus **c)** den Grenzübergang $\omega \to \omega_0$ durch. In welchem Zustand befindet sich jetzt der Schwingkreis?

Hilfe: Der unbestimmte Ausdruck lässt sich mit Hilfe der Regel von l'Hospital weiter vereinfachen.

[$u_C(t) = \omega_0\, L\, \hat{i}_0\, \dfrac{\omega_0\, t}{2} \sin(\omega_0\, t)$]

Aufgabe 2:

In untenstehender Schaltung mit der Zeitkonstanten $\tau = RC$ wird ein Schalter zum Zeitpunkt $t=0$ in die Position 1 gebracht. Der Kondensator sei zunächst energiefrei, d.h. $u_c(0)=0$. Die Quellspannung sei rampenförmig ansteigend mit $u_0(t) = U_0 \cdot t/\tau$. Zum Zeitpunkt $t=\tau$ wird der Schalter in Position 2 gebracht.



Es soll mit Hilfe der Methode der Laplace-Transformation die Kondensatorspannung $u_c(t)$ für $t \geq 0$ bestimmt werden. Bearbeiten Sie dazu schrittweise die folgenden Aufgabenpunkte.

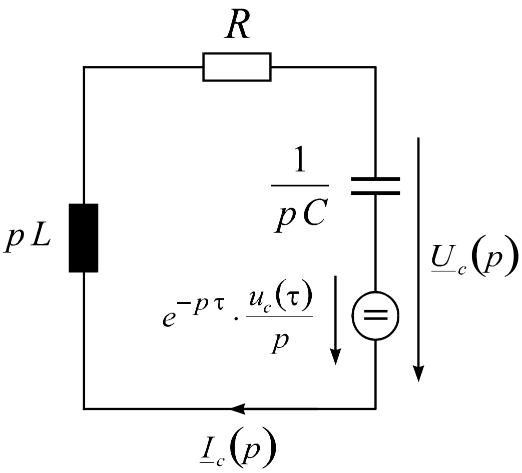
a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\underline{U}_0(p)$. [$\underline{U}_0(p) = U_0/(\tau\, p^2)$]

b) Berechnen Sie die Spannung $u_c(t)$ für $0 \leq t \leq \tau$. Wie groß ist dann $u_c(t=\tau)$?

[$u_c(t) = U_0\,\left(t/\tau - 1 + e^{-t/\tau}\right)$, $u_c(t=\tau) = U_0/e$]

c) Folgende Laplace-Ersatzschaltung gibt das Verhalten der Anordnung für $t \geq \tau$ wieder. Berechnen Sie den Zeitverlauf $u_c(t)$ für $t \geq \tau$ unter Beachtung der Dimensionierung $R = 2\cdot\sqrt{L/C}$ (aperiodischer Grenzfall).

[$u_c(t \geq \tau) = U_0\, e \cdot \left(-1 + t/\sqrt{L\,C}\right) e^{-t/\sqrt{L\,C}}$]



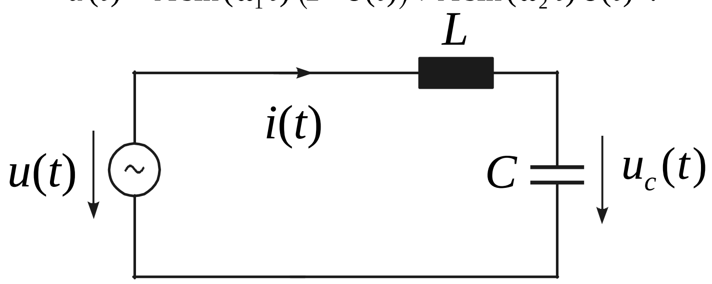
Hilfe: $\dfrac{1}{p} - \dfrac{\omega_0^2}{p\cdot(p+\omega_0)^2} = \dfrac{p+2\,\omega_0}{(p+\omega_0)^2}$ $\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ$ $e^{-\omega_0 t}\left(1+\omega_0\, t\right)$

d) Skizzieren Sie qualitativ den gesamten Zeitverlauf von $u_c(t)$.

Aufgabe 3:

An einen Schwingkreis mit der Resonanzfrequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ wird mit $-\infty < t < \infty$ folgende Generatorspannung angelegt:

$$u(t) = A\sin(\omega_1 t)\,(1-\varepsilon(t)) + A\sin(\omega_2 t)\,\varepsilon(t) \ .$$



Der Generator sei bereits seit sehr langer Zeit eingeschaltet.

a) Wie lautet die Generatorspannung für $t \le 0$? $[\,u(t\le 0) = A\sin(\omega_1 t)\,]$

b) Wie lautet die Generatorspannung für $t \ge 0$? $[\,u(t\ge 0) = A\sin(\omega_2 t)\,]$

c) Berechnen Sie mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung die Zeitfunktionen des Stroms $i(t\le 0)$ und der Kondensatorspannung $u_c(t\le 0)$ für den eingeschwungenen Zustand bei $t \le 0$.

$[\,i(t\le 0) = -\dfrac{A}{\omega_1 L}\dfrac{\omega_1^2}{\omega_1^2-\omega_0^2}\cos(\omega_1 t)\,, \quad u_c(t\le 0) = \dfrac{A}{1-\omega_1^2/\omega_0^2}\sin(\omega_1 t)\,]$

d) Wie groß sind der Strom im Zeitnullpunkt $i(0)$ und die Kondensatorspannung im Zeitnullpunkt $u_c(0)$? $[\,i(0) = -\dfrac{A}{\omega_1 L}\dfrac{\omega_1^2}{\omega_1^2-\omega_0^2}\ , \quad u_c(0) = 0\,]$

e) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\underline{I}(p)$ ●—○ $i(t\ge 0)$.

$[\,\underline{I}(p) = \dfrac{A\omega_2}{L}\dfrac{p}{(p^2+\omega_2^2)\cdot(p^2+\omega_0^2)} - \dfrac{A}{L}\dfrac{\omega_1}{\omega_1^2-\omega_0^2}\dfrac{p}{p^2+\omega_0^2}\,]$

f) Bestimmen Sie mit Hilfe einer Tabelle der Laplace-Korrespondenzen die Zeitfunktion $i(t\ge 0)$. $[\,i(t\ge 0) = \dfrac{A}{L}\left[\dfrac{\omega_2}{\omega_2^2-\omega_0^2} - \dfrac{\omega_1}{\omega_1^2-\omega_0^2}\right]\cos(\omega_0 t) - \dfrac{A}{\omega_2 L}\dfrac{\omega_2^2}{\omega_2^2-\omega_0^2}\cos(\omega_2 t)\,]$

g) Erklären Sie die physikalische Bedeutung der beiden Anteile, aus denen sich der Strom $i(t\ge 0)$ zusammensetzt. [freie Eigenschwingung, angeregt durch Frequenzwechsel bei $t = 0$ und durch Generator erzwungene Schwingung]

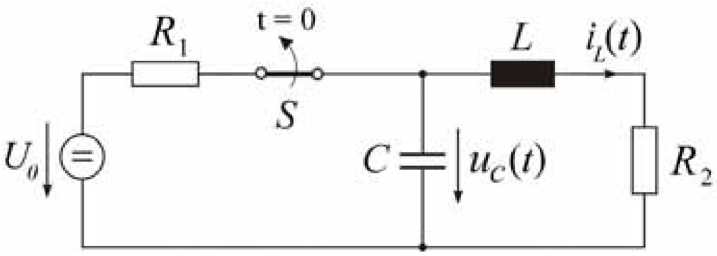
h) Es gelte nun $\omega_1/\omega_0 = 2$. Wie groß muss ω_2/ω_0 sein, damit gilt:

$$i(t\ge 0) = \frac{A}{L}\frac{\omega_2}{\omega_0^2-\omega_2^2}\left[\cos(\omega_2 t) + \cos(\omega_0 t)\right] \ ?$$

$[\,\omega_2/\omega_0 = 3{,}303\,]$

Aufgabe 4:

In untenstehender Schaltung, bei der eine Gleichspannungsquelle an einem Schwingkreis anliegt, sei der Schalter S bereits seit sehr langer Zeit geschlossen, d.h. alle früheren Einschwingvorgänge können als beendet angesehen werden. Dann wird zum Zeitpunkt $t = 0$ der Schalter geöffnet.



Es soll mit Hilfe der Methode der *Laplace-Transformation* der Spulenstrom $i_L(t)$ für $t \geq 0$ bestimmt werden. Bearbeiten Sie dazu schrittweise die folgenden Aufgabenpunkte.

a) Wie verhalten sich Spulen bzw. Kondensatoren bei Gleichspannungsanregung? Wie groß sind deshalb $u_c(0)$ und $i_L(0)$?

[$u_c(0) = U_0\, R_2/(R_1 + R_2)$ und $i_L(0) = U_0/(R_1 + R_2)$]

b) Zeichnen Sie die Ersatzschaltung im Laplace-Bereich und leiten Sie daraus die Laplace-Transformierte $\underline{I}_L(p) = \dfrac{U_0}{R_1 + R_2} \cdot \dfrac{p + 2\delta}{p^2 + 2\delta\, p + \omega_0^2}$ her.

c) Berechnen Sie den Strom $i_L(t)$ für $t \geq 0$. Nehmen Sie hierzu an, dass der Schwingungsfall vorliegt $\left(R_2 < 2\sqrt{L/C}\right)$.

[$i_L(t) = \dfrac{U_0}{R_1 + R_2} \cdot e^{-\delta\, t} \cdot \left(\cos\omega_E t + \dfrac{\delta}{\omega_E} \sin\omega_E t \right)$]

d) Wie kann man das Ergebnis aus **c)** vereinfachen, falls $R_2 = 0$ gilt?

[$i_L(t) = \dfrac{U_0}{R_1} \cdot \cos\omega_0 t$]

e) Skizzieren Sie den Strom $i_L(t)$ für $R_2 = 0$.