Fourier-Analyse

Aufgabe 1:

Gegeben sei folgende T - periodische Zeitfunktion:

$$f(t) = \begin{cases} 2\,A\,t/T & \text{für} \quad 0 \le t < T/2 \\ -A/2 & \text{für} \quad T/2 \le t < T \end{cases} .$$

a) Zeichnen Sie die Funktion $f(t)$ im Bereich $-T \le t \le 2\,T$.

b) Welche Symmetrien besitzt die Funktion $f(t)$? [keine]

c) Welchen Gleichanteil a_0 besitzt die Funktion $f(t)$? [$a_0 = 0$]

d) Berechnen Sie die Entwicklungskoeffizienten $\underline{c}_n$ der komplexen Fourier-Reihe anhand der Vorschrift

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-j\,n\,\omega_1\,t}\, dt \,.$$

[$\underline{c}_n = \dfrac{A}{2\,n^2\pi^2} \left(j\,n\,\pi\,(-1)^n + (-1)^n - 1 \right) + \dfrac{A}{j\,n\,4\,\pi} \left(1 - (-1)^n \right)$]

e) Wie lautet $\underline{c}_n$, falls n gerade ist ? [$\underline{c}_n = \dfrac{j\,A}{2\,n\,\pi}$]

f) Wie lautet $\underline{c}_n$, falls n ungerade ist ? [$\underline{c}_n = \dfrac{-A}{n\,\pi} \left(\dfrac{1}{n\,\pi} + j \right)$]

Hilfe: $\displaystyle\int x\, e^{a\,x}\, dx = \frac{e^{a\,x}}{a^2} (a\,x - 1)$

Aufgabe 2:

Im Intervall $0 \le t < T$ sei folgende Zeitfunktion gegeben:

$$f(t) = e^{-t/T} \,.$$

Die Funktion wird anhand der Vorschrift $f(t+T) = f(t)$ periodisch fortgesetzt und soll durch ihre komplexe Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \, e^{j\,n\,\omega_1\,t} \qquad \text{mit} \quad \underline{c}_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-j\,n\,\omega_1\,t}\, dt$$

und $\omega_1 T = 2\,\pi$ dargestellt werden.

a) Zeichnen Sie den Kurvenverlauf von $f(t)$ im Bereich $-T \le t < 2\,T$.

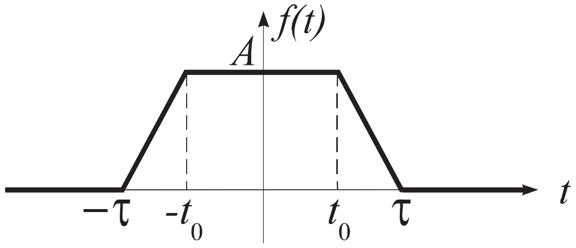
b) Berechnen Sie den Gleichanteil der Funktion $f(t)$. [$a_0 = 0{,}632$]

c) Zeigen Sie, dass die Entwicklungskoeffizienten $\underline{c}_n$ der Funktion $f(t)$ wie $\underline{c}_n = \dfrac{1-1/e}{1+j\,2\,\pi\,n}$ geschrieben werden können.

d) Geben Sie mit Hilfe der $\underline{c}_n$ für $n \ge 1$ folgende Koeffizienten an: a_n, b_n, A_n, φ_n.
[$a_n = 2\,\mathrm{Re}\{\underline{c}_n\} = 2\,\dfrac{1-1/e}{1+(2\,\pi\,n)^2}$, $b_n = -2\,\mathrm{Im}\{\underline{c}_n\} = 4\,\pi\,n\,\dfrac{1-1/e}{1+(2\,\pi\,n)^2}$,
$A_n = 2\,|\underline{c}_n| = 2\,\dfrac{1-1/e}{\sqrt{1+(2\,\pi\,n)^2}}$, $\varphi_n = -\arctan\dfrac{b_n}{a_n} = -\arctan(2\,\pi\,n)$]

Aufgabe 3:

Mit $0 \le t_0 \le \tau$ sei eine gerade Zeitfunktion $f(t)$ der Dauer 2τ gegeben:



a) Berechnen Sie für beliebiges $t_0 \in [0, \tau]$ die Fourier-Transformierte

$$\underline{F}(j\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt .$$

[$\underline{F}(j\omega) = \dfrac{2A}{\omega^2(\tau - t_0)} (\cos\omega t_0 - \cos\omega\tau)$]

b) Welche Impulsform entsteht für $t_0 = 0$? Vereinfachen Sie für diesen Spezialfall das Ergebnis aus **a)** und skizzieren Sie das Betragsspektrum $F(\omega)$ im Bereich $-4\pi/\tau \le \omega \le 4\pi/\tau$.

[sym. Dreiecksimpuls mit $\underline{F}(j\omega) = A\tau\,\mathrm{si}^2\dfrac{\omega\tau}{2}$]

c) Welche Impulsform entsteht für $t_0 = \tau$? Vereinfachen Sie für diesen Spezialfall das Ergebnis aus **a)** und skizzieren Sie das Betragsspektrum $F(\omega)$ im Bereich $-4\pi/\tau \le \omega \le 4\pi/\tau$.

[sym. Rechteckimpuls mit $\underline{F}(j\omega) = 2A\tau\,\mathrm{si}(\omega\tau)$]

Hilfen: $\int x \cdot e^{ax}\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2} \cdot (a x - 1)$ bzw. $\int x \cdot \cos(a x)\, dx = \dfrac{\cos(a x)}{a^2} + \dfrac{x \cdot \sin(a x)}{a}$

$1 - \cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ und $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin x \approx x$ für $x \to 0$

Aufgabe 4:

Gegeben sei mit $a > 0$ und $t_0 \geq 0$ folgende Zeitfunktion

$$f(t) = \varepsilon(t)\, e^{-a\,t} - \delta(t - t_0)\ .$$

a) Zeichnen Sie die Funktion $f(t)$.

b) Berechnen Sie die komplexe Fourier-Transformierte $\underline{F}(j\,\omega)$.

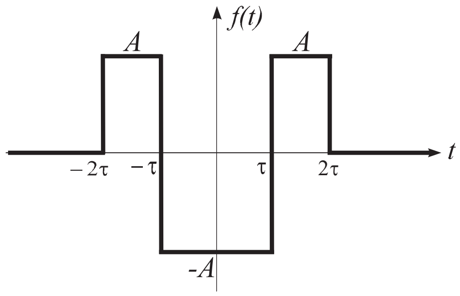
[$\underline{F}(j\,\omega) = \dfrac{1}{a + j\,\omega} - e^{-j\,\omega\,t_0}$]

c) Berechnen Sie daraus für $a = 1$ und $t_0 = 0$ das Amplituden- und das Phasenspektrum gemäß folgender Darstellung $\underline{F}(j\,\omega) = F(\omega)\, e^{j\,\Theta(\omega)}$.

[$F(\omega) = \dfrac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}$, $\Theta(\omega) = -\dfrac{\pi}{2} - \arctan\omega$]

Aufgabe 5:

Es sei mit $A > 0$ eine gerade Zeitfunktion $f(t)$ der Dauer $4\,\tau$ gegeben:



a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\underline{F}(j\,\omega) = \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\,\omega\,t}\, dt$ entweder direkt oder durch Ausnutzung von Linearitäts- und Verschiebungssatz.

[$\underline{F}(j\,\omega) = -4\,A\,\tau\,\mathrm{si}\dfrac{\omega\,\tau}{2}\cdot\sin\dfrac{\omega\,\tau}{2}\cdot\sin\omega\,\tau$]

b) Zeigen Sie, dass man das Betragsspektrum wie

$$F(\omega) = 4\,A\,\tau\left|\mathrm{si}\frac{\omega\,\tau}{2}\cdot\sin\frac{\omega\,\tau}{2}\cdot\sin\omega\,\tau\right|$$

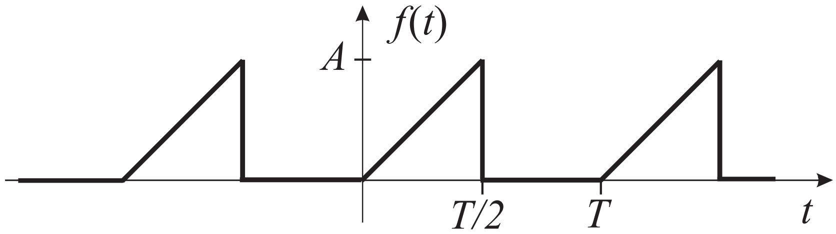
schreiben kann. Wie groß ist $F(0)$ und bei welcher Frequenz liegt die erste bzw. die zweite Nullstelle des Spektrums. [$F(0) = 0$, $\omega_g = \pi/\tau$ und $2\,\omega_g = 2\,\pi/\tau$]

c) Skizzieren Sie das Betragsspektrum $F(\omega)$ im Bereich $-4\,\pi/\tau \leq \omega \leq 4\,\pi/\tau$.

Hilfen: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ und $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

Aufgabe 6:

Durch Einweggleichrichtung einer Sägezahnschwingung entstehe folgende T-periodische Zeitfunktion.



a) Welche Symmetrien besitzt die Funktion $f(t)$? [keine]

b) Welchen Gleichanteil a_0 besitzt die Funktion $f(t)$? [$a_0 = A/4$]

c) Zeigen Sie (durch Berechnen der Entwicklungsintegrale), dass die Koeffizienten a_n und b_n der Fourier-Reihe

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\,\omega_1\, t) + b_n \sin(n\,\omega_1\, t) \right]$$

wie folgt geschrieben werden können:

$$a_n = \left(-1 + (-1)^n\right) \frac{A}{n^2\,\pi^2} \quad \text{und} \quad b_n = -(-1)^n \frac{A}{n\,\pi}\,.$$

d) Wie lauten a_n und b_n, falls n gerade ist? [$a_n = 0$ und $b_n = -\dfrac{A}{n\,\pi}$]

e) Wie lauten a_n und b_n, falls n ungerade ist? [$a_n = \dfrac{-2\,A}{n^2\,\pi^2}$ und $b_n = \dfrac{A}{n\,\pi}$]

Hilfen: $\int x \cos(a\,x)\,d\,x = \dfrac{\cos(a\,x)}{a^2} + \dfrac{x \sin(a\,x)}{a}$ und $\int x \sin(a\,x)\,d\,x = \dfrac{\sin(a\,x)}{a^2} - \dfrac{x \cos(a\,x)}{a}$